有効標本数と自由度調整で対処する空間的自己相関

Coping with spatial autocorrelation using effective sample size and adjusted degree of freedom

入江 貴博(Takahiro Irie)
irie@bio-math10.biology.kyushu-u.ac.jp

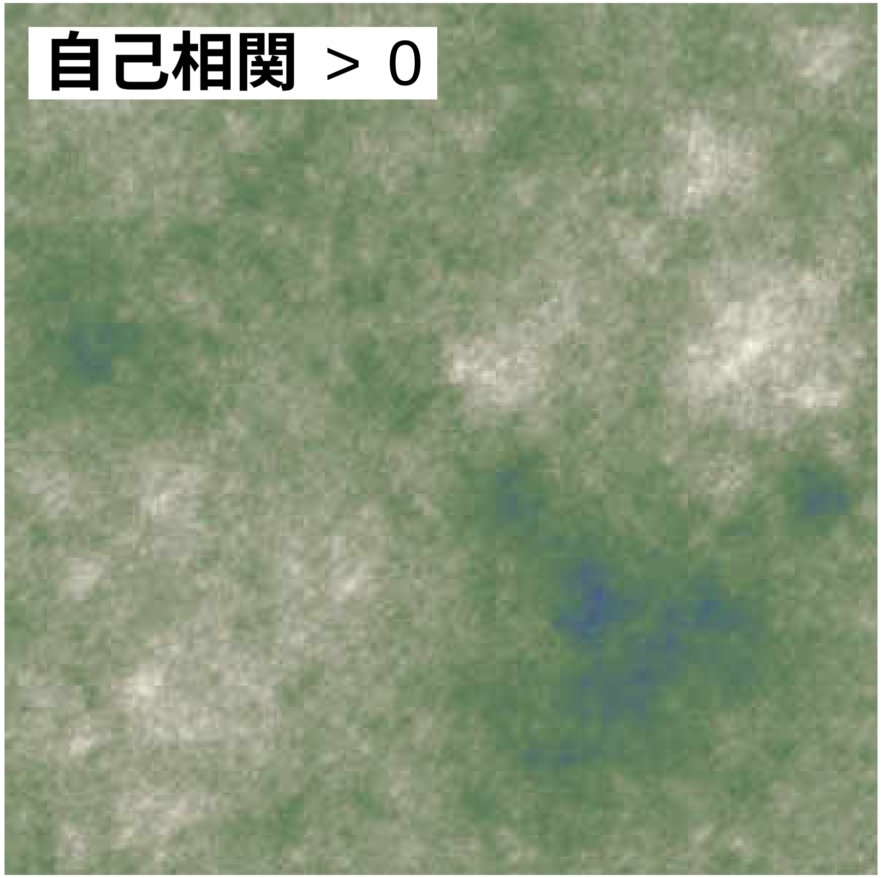
空間的自己相関とは

空間的自己相関とは

正の自己相関：近い場所の値が互いに似る

空間的自己相関とは

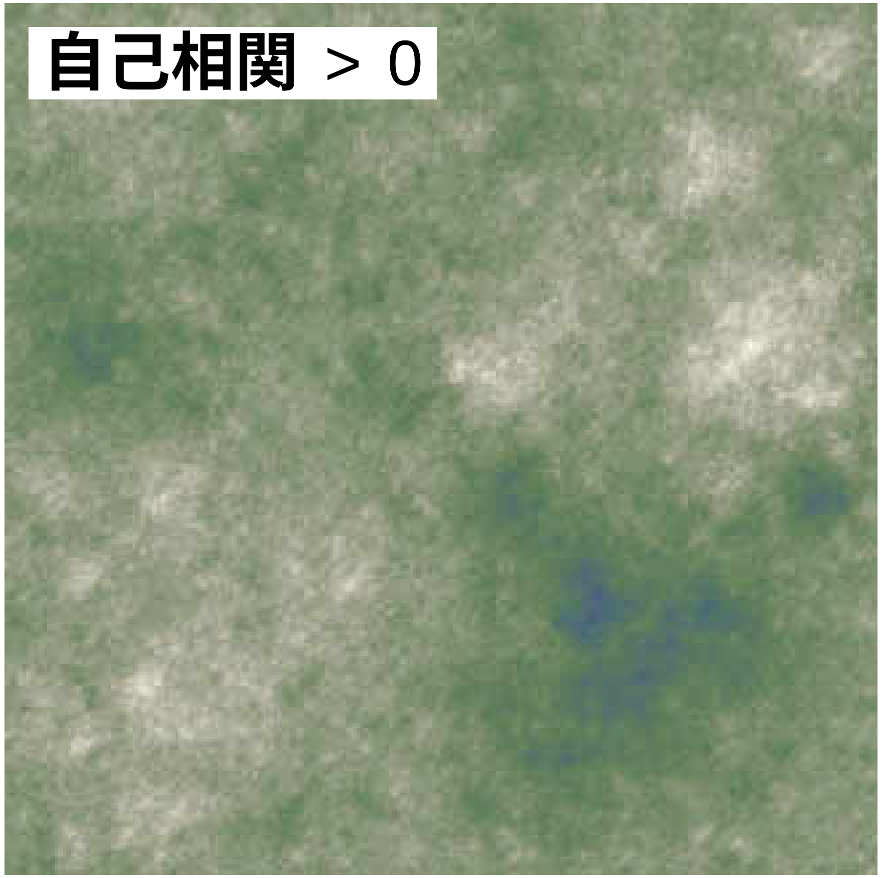
正の自己相関：近い場所の値が互いに似る



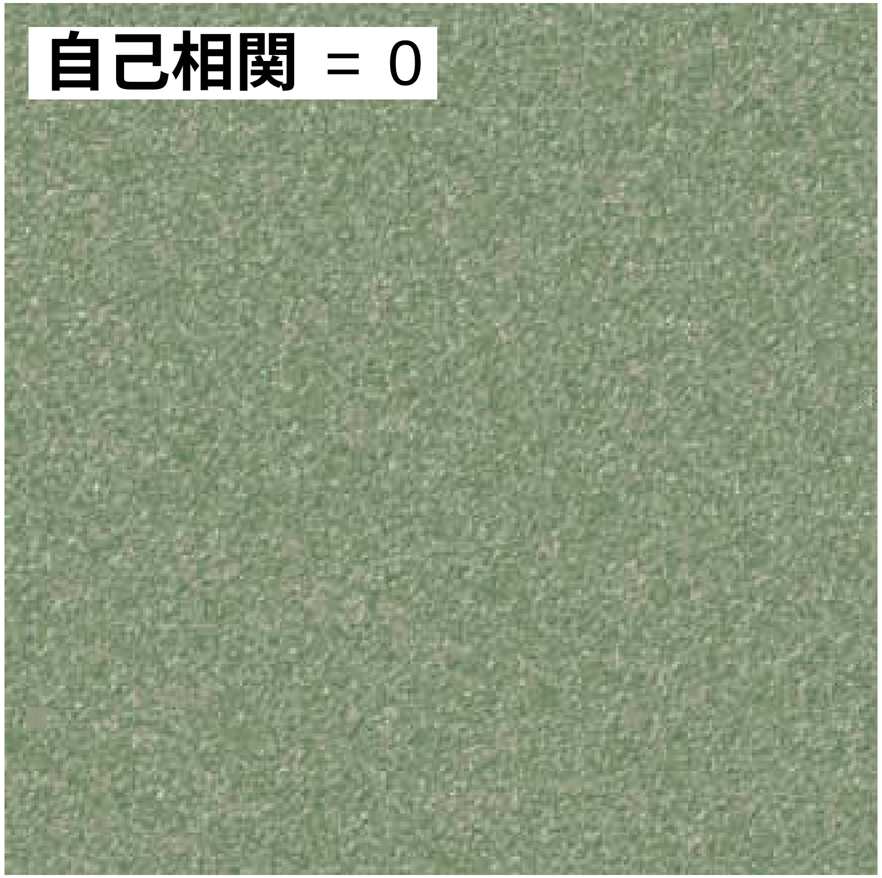
Fractal landscape (RMD method)

空間的自己相関とは

正の自己相関：近い場所の値が互いに似る



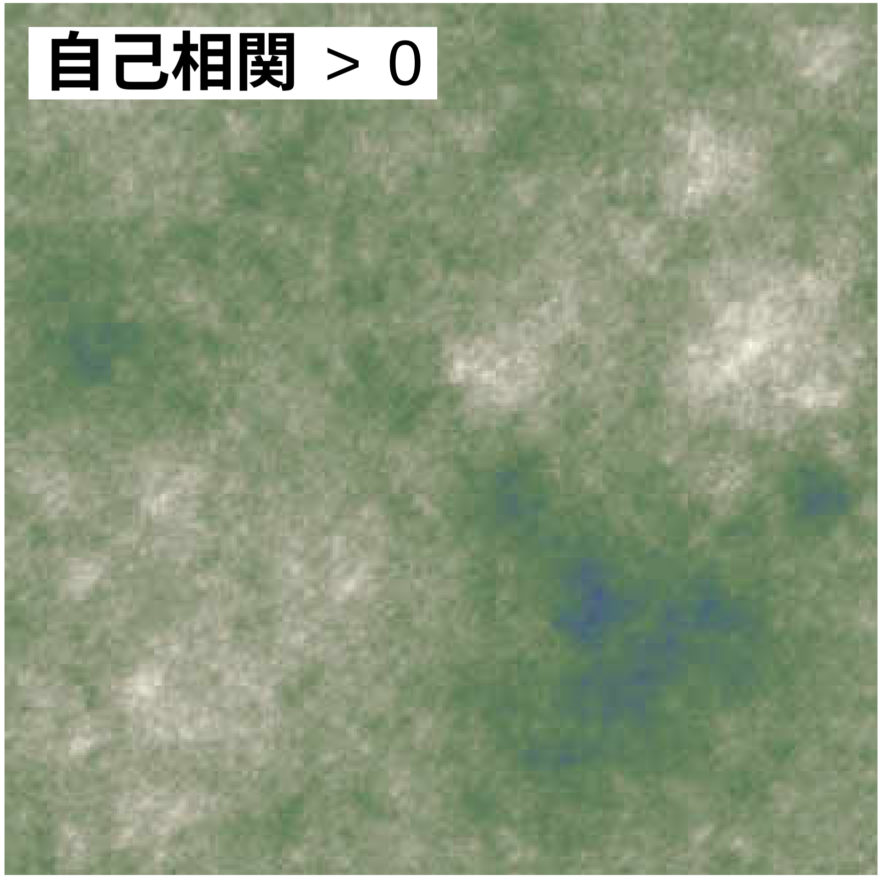
Fractal landscape (RMD method)



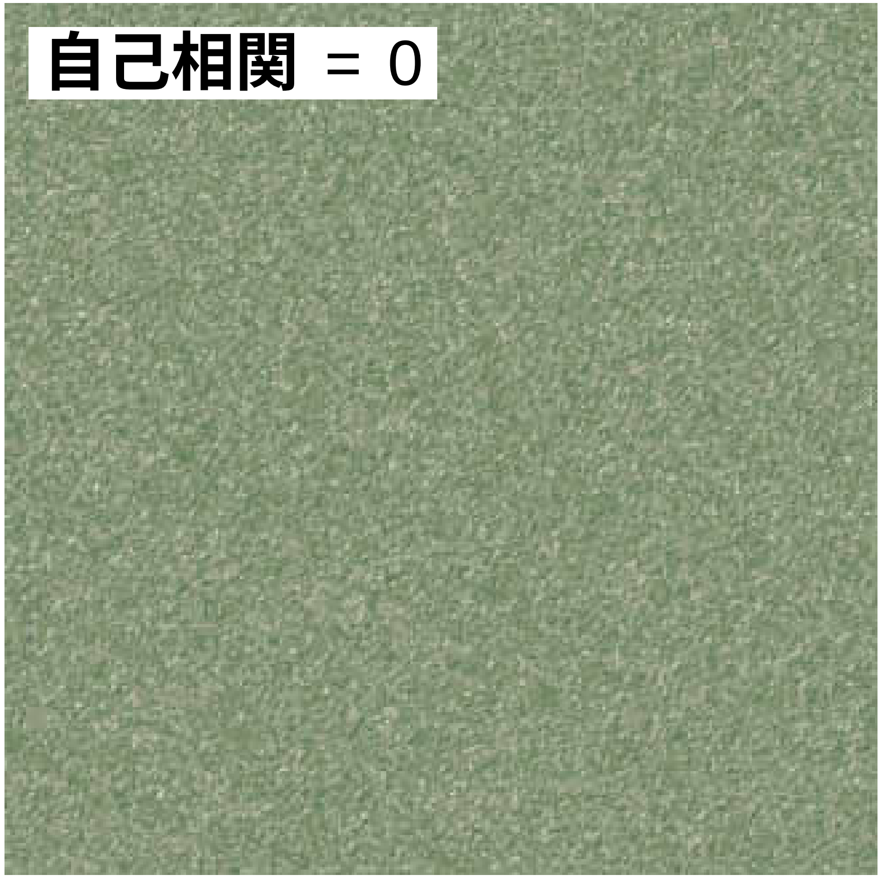
Gaussian white noise

空間的自己相関とは

正の自己相関：近い場所の値が互いに似る



Fractal landscape (RMD method)



Gaussian white noise

統計解析を行う際に考慮が必要

Red herring:

Red herring:

誤った答えへと誘導するもの.

Red herring:

誤った答えへと誘導するもの.

Lennon, J. J. (2000) Red-shifts and red herrings in geographical ecology. *Ecography* 25: 601-615.

Red herring:

誤った答えへと誘導するもの．

Lennon, J. J. (2000) Red-shifts and red herrings in geographical ecology. *Ecography* 25: 601-615.

Residual spatial autocorrelation (RSA):

Red herring:

誤った答えへと誘導するもの.

Lennon, J. J. (2000) Red-shifts and red herrings in geographical ecology. *Ecography* 25: 601-615.

Residual spatial autocorrelation (RSA):

1. モデルの推定値にバイアスを生じる?

Red herring:

誤った答えへと誘導するもの.

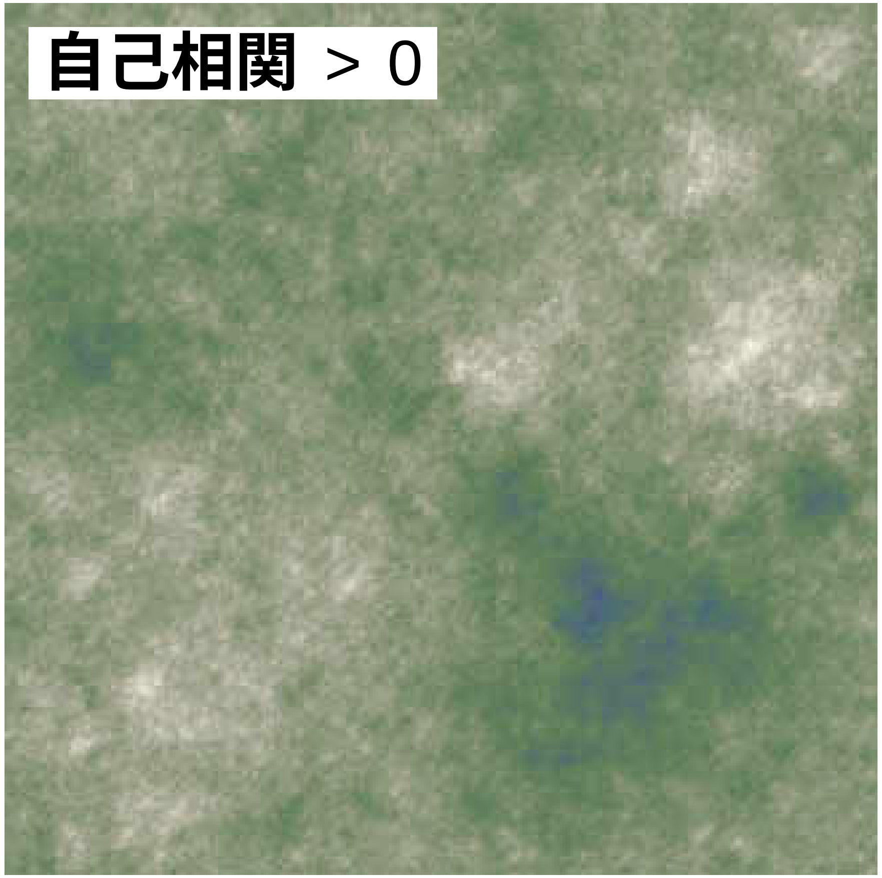
Lennon, J. J. (2000) Red-shifts and red herrings in geographical ecology. *Ecography* 25: 601-615.

Residual spatial autocorrelation (RSA):

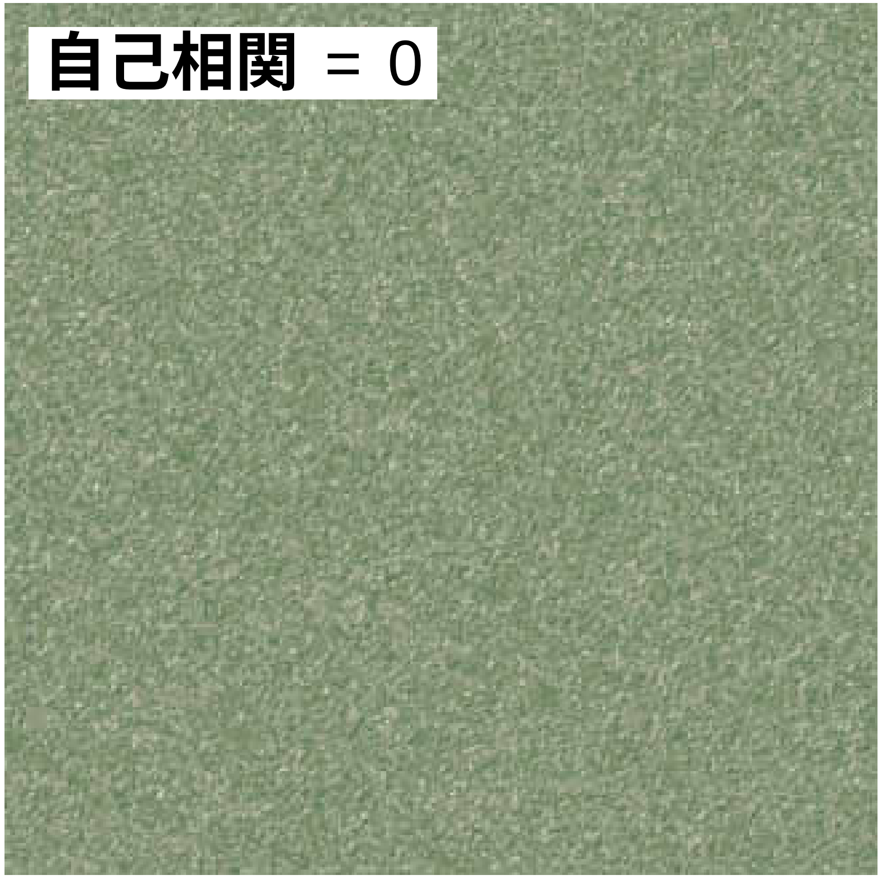
1. モデルの推定値にバイアスを生じる?

2. Type I error rateを過大にする.

自己相関を無視して平均の標準誤差を計算する



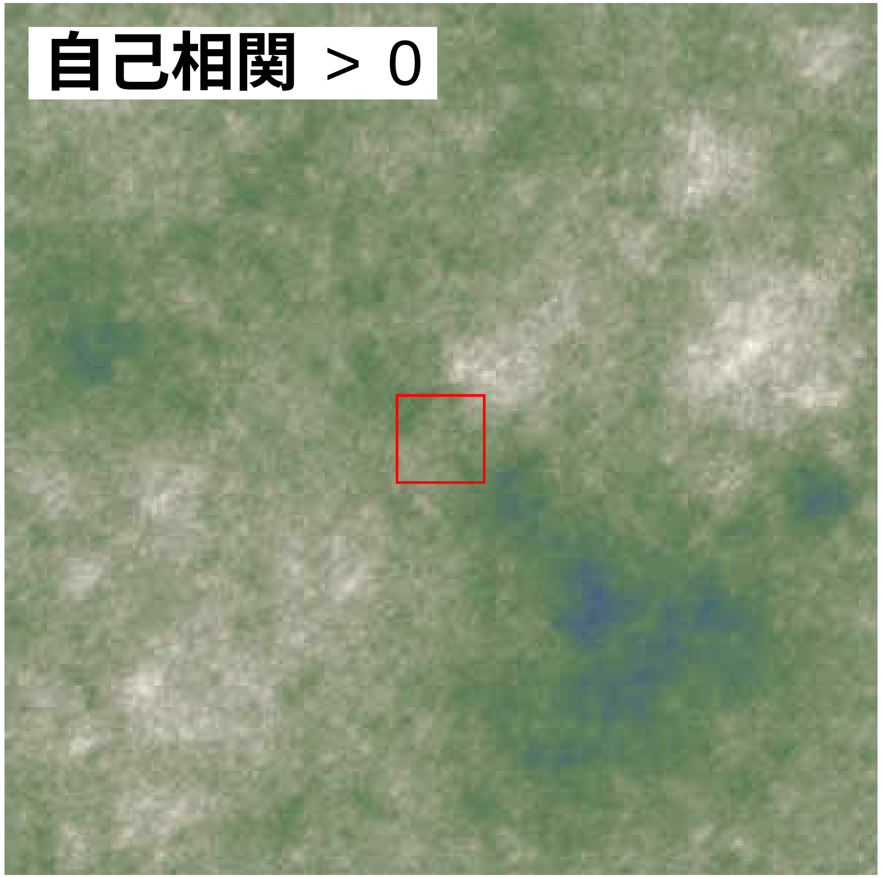
Fractal landscape (RMD method)



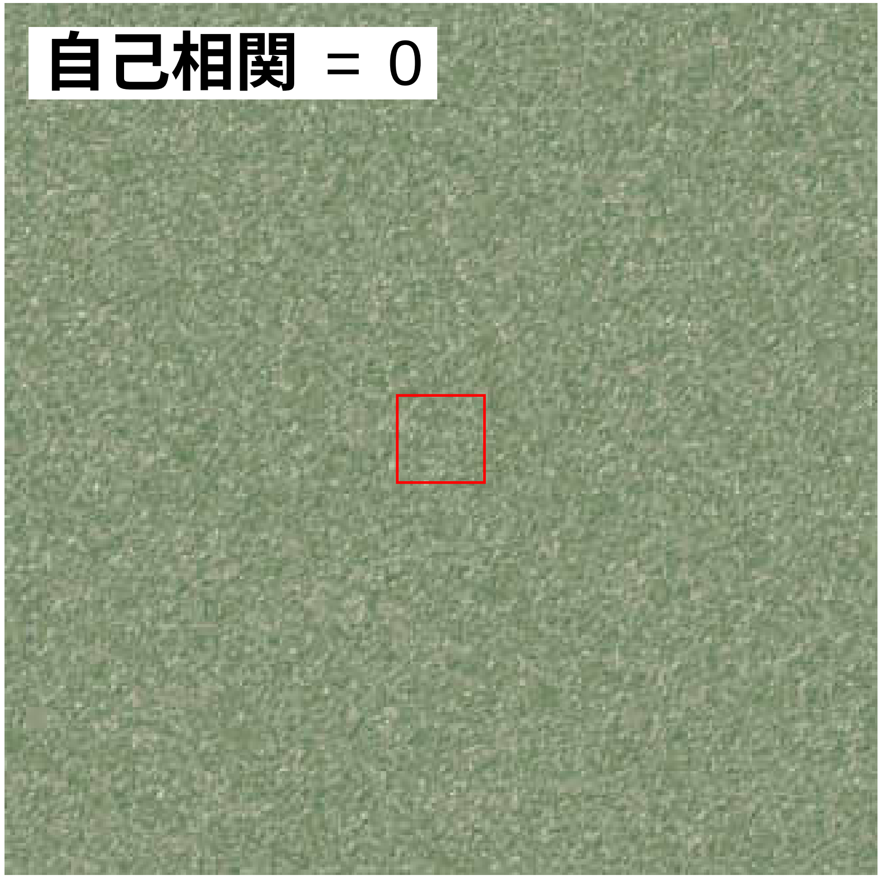
Gaussian white noise

自己相関を無視して平均の標準誤差を計算する

コドラートのサイズを変えて計算:



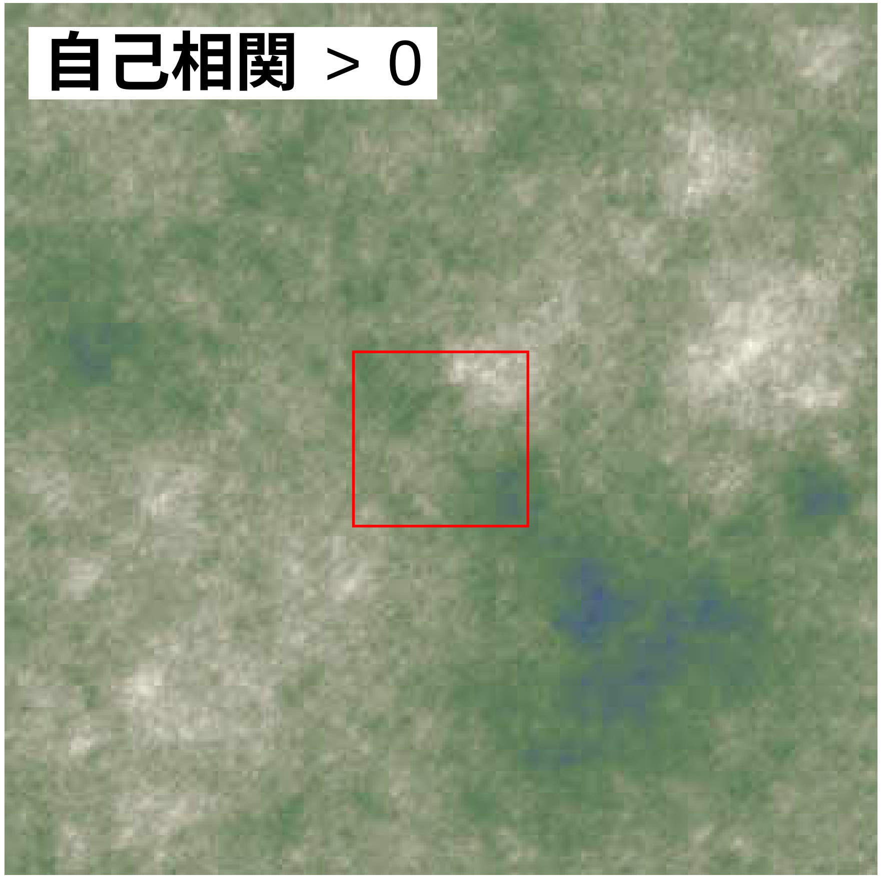
Fractal landscape (RMD method)



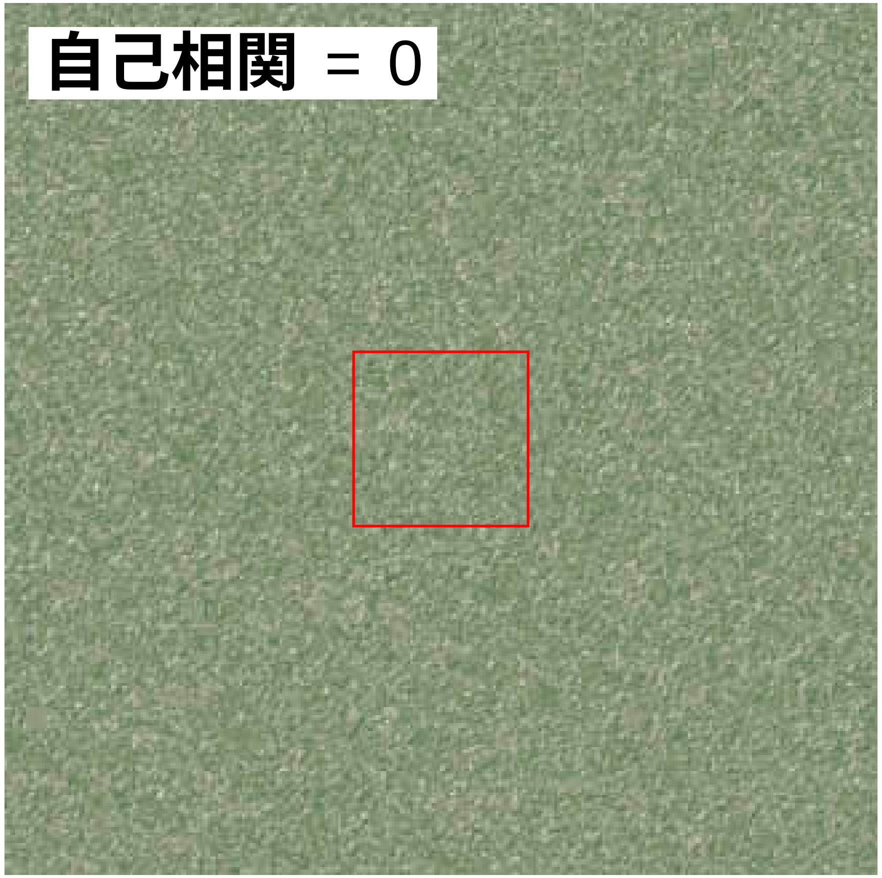
Gaussian white noise

自己相関を無視して平均の標準誤差を計算する

コドラートのサイズを変えて計算:

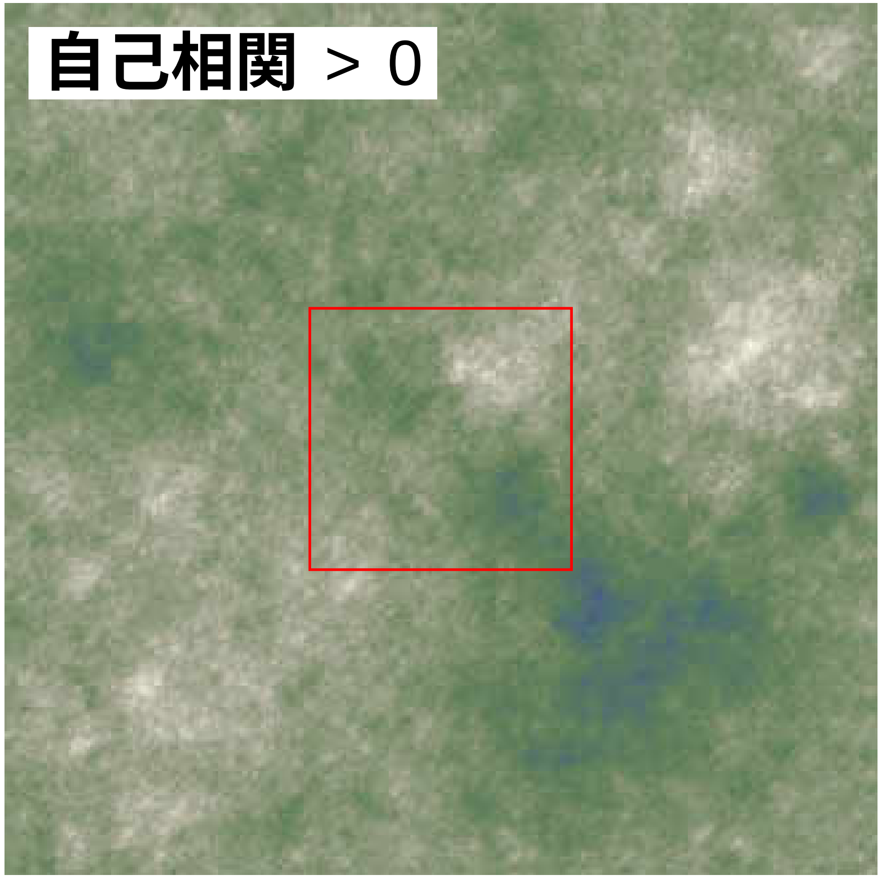


Fractal landscape (RMD method)

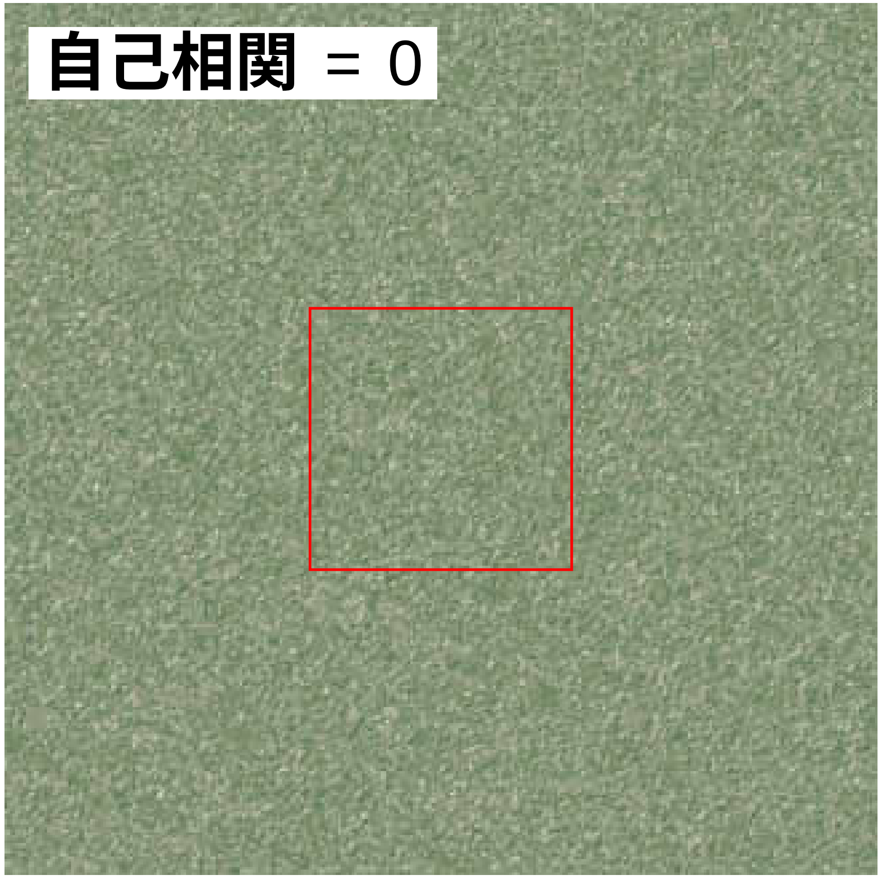


Gaussian white noise

自己相関を無視して平均の標準誤差を計算する
コドラートのサイズを変えて計算:



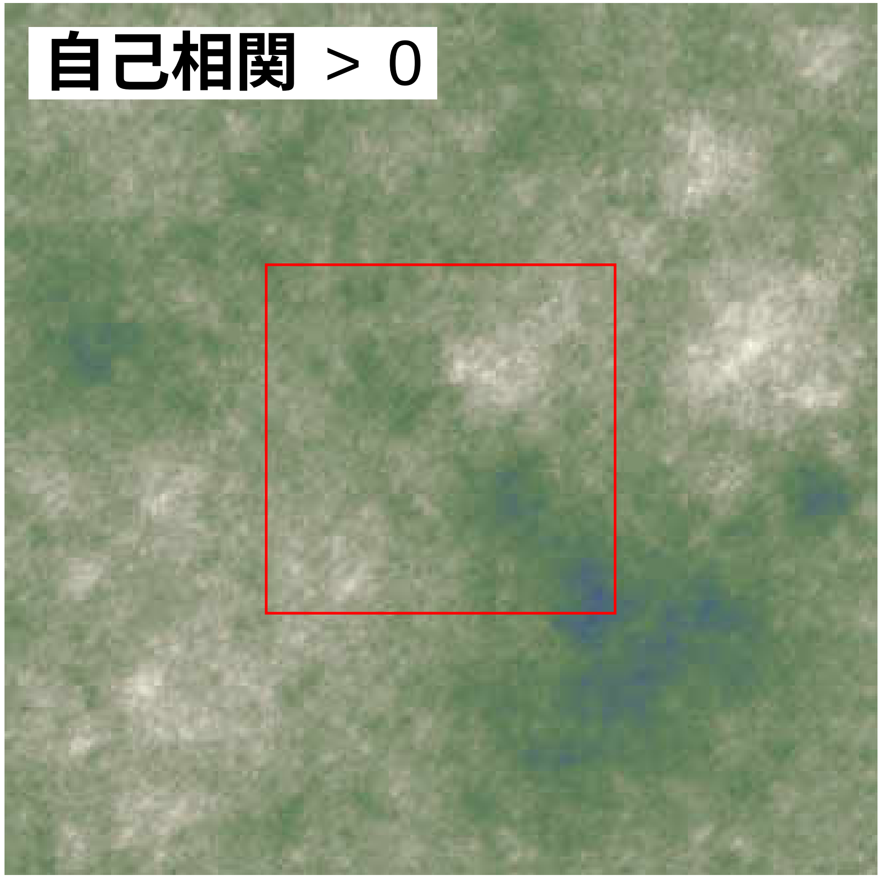
Fractal landscape (RMD method)



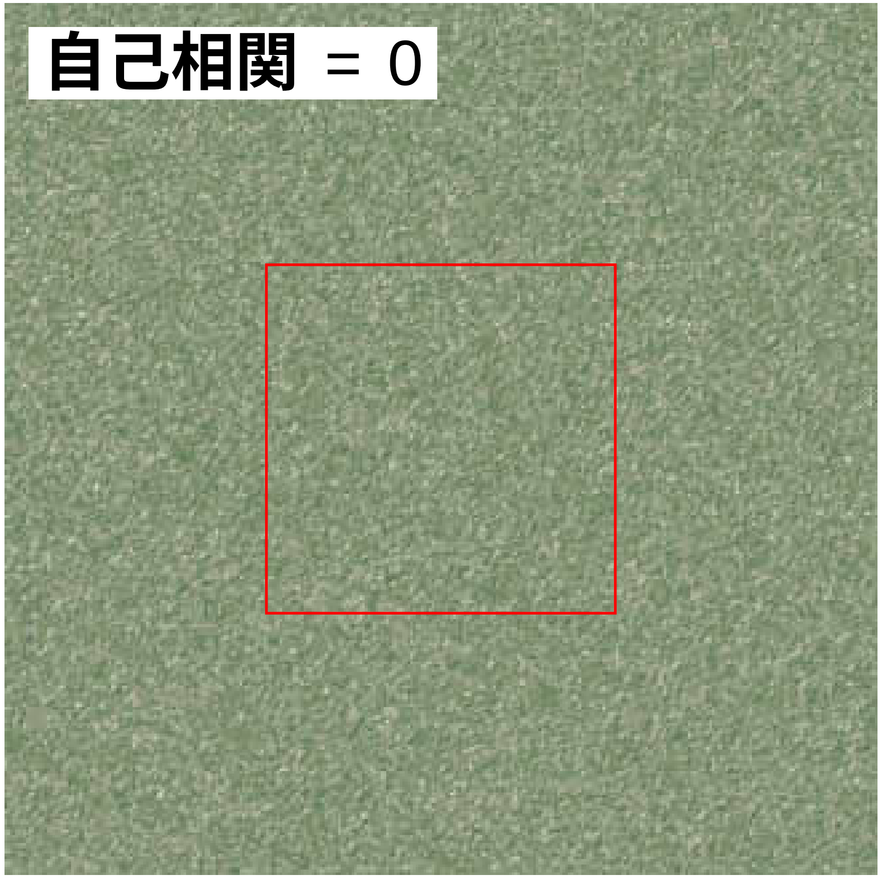
Gaussian white noise

自己相関を無視して平均の標準誤差を計算する

コドラートのサイズを変えて計算:



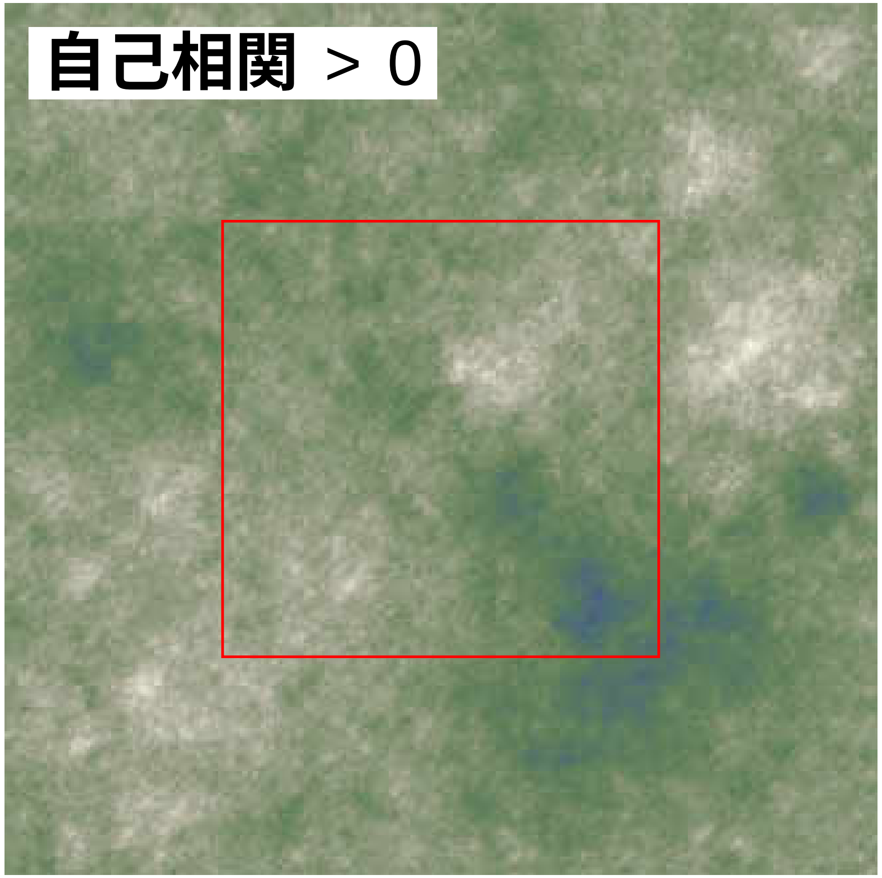
Fractal landscape (RMD method)



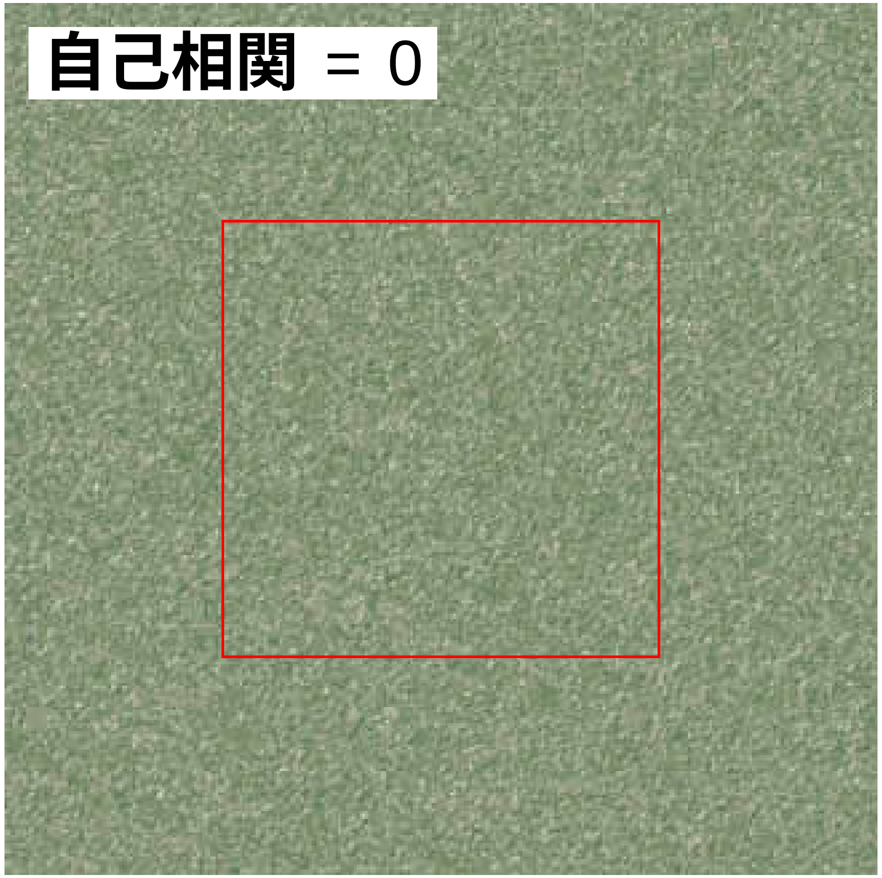
Gaussian white noise

自己相関を無視して平均の標準誤差を計算する

コドラートのサイズを変えて計算:

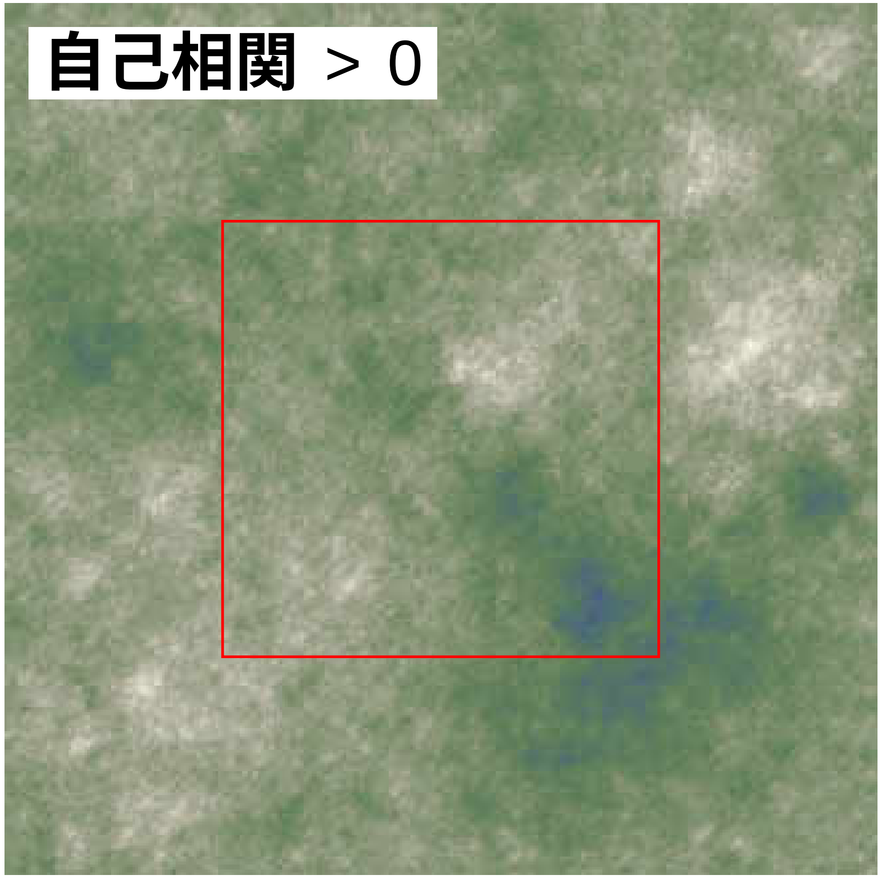


Fractal landscape (RMD method)

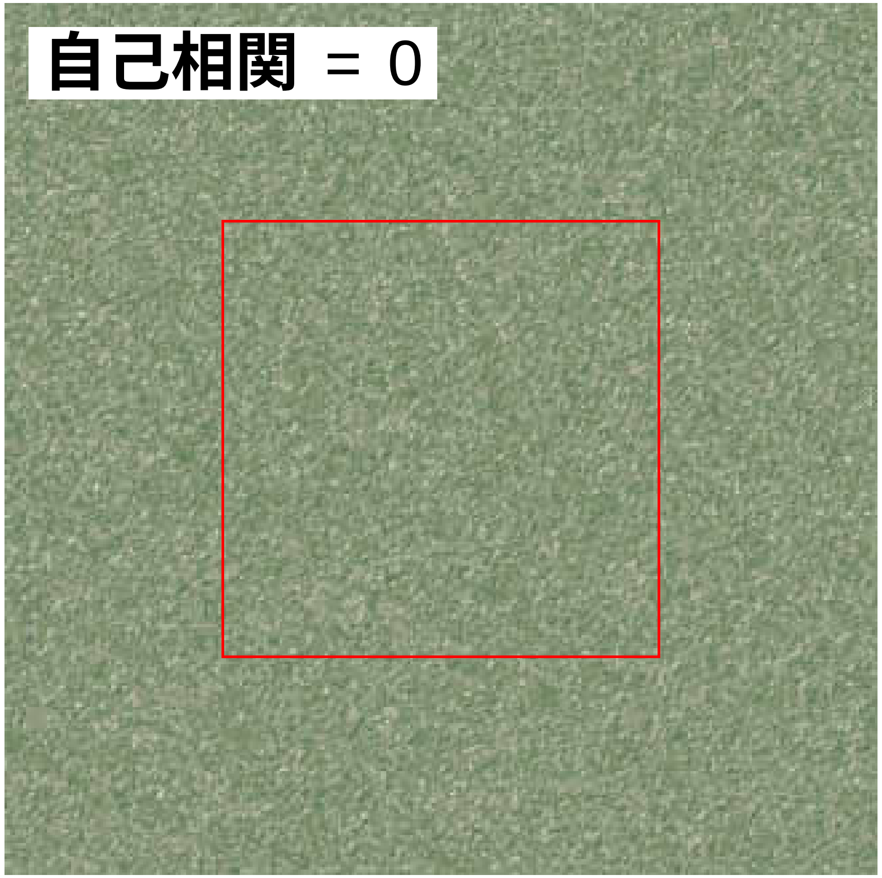


Gaussian white noise

$$\mathrm{SE}_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}$$

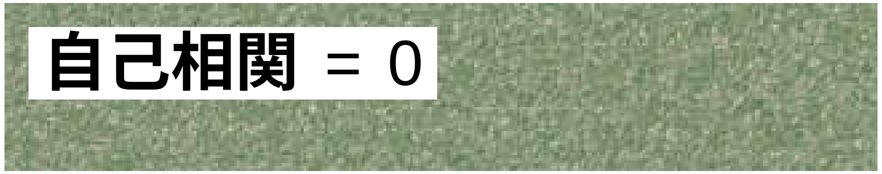


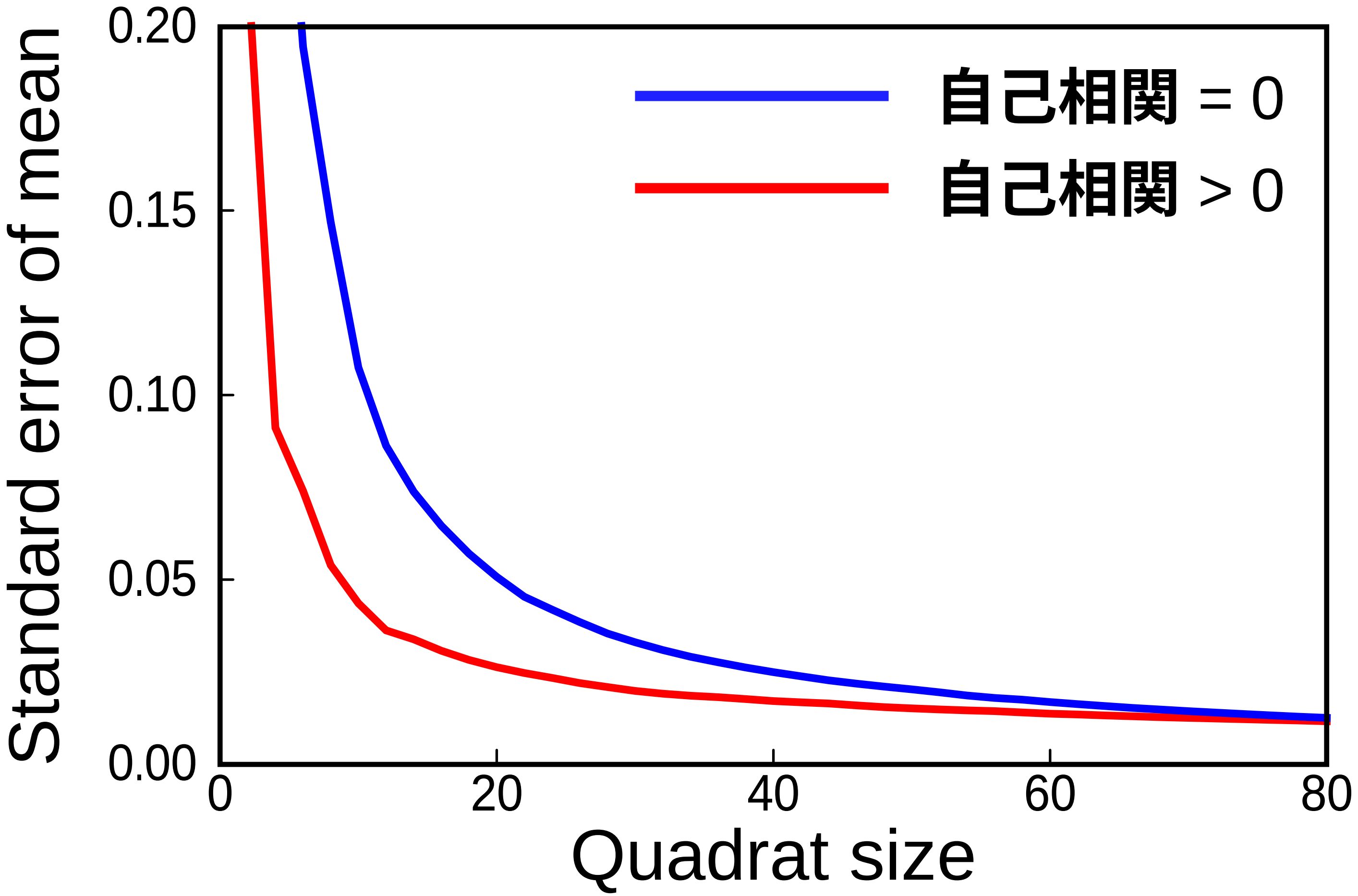
Fractal landscape (RMD method)



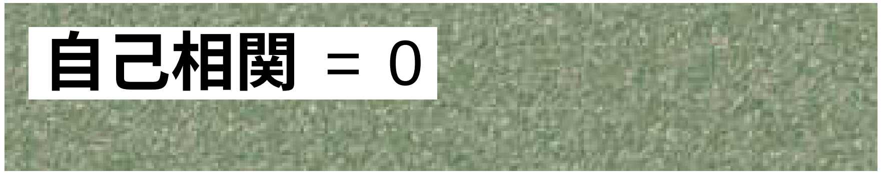
Gaussian white noise

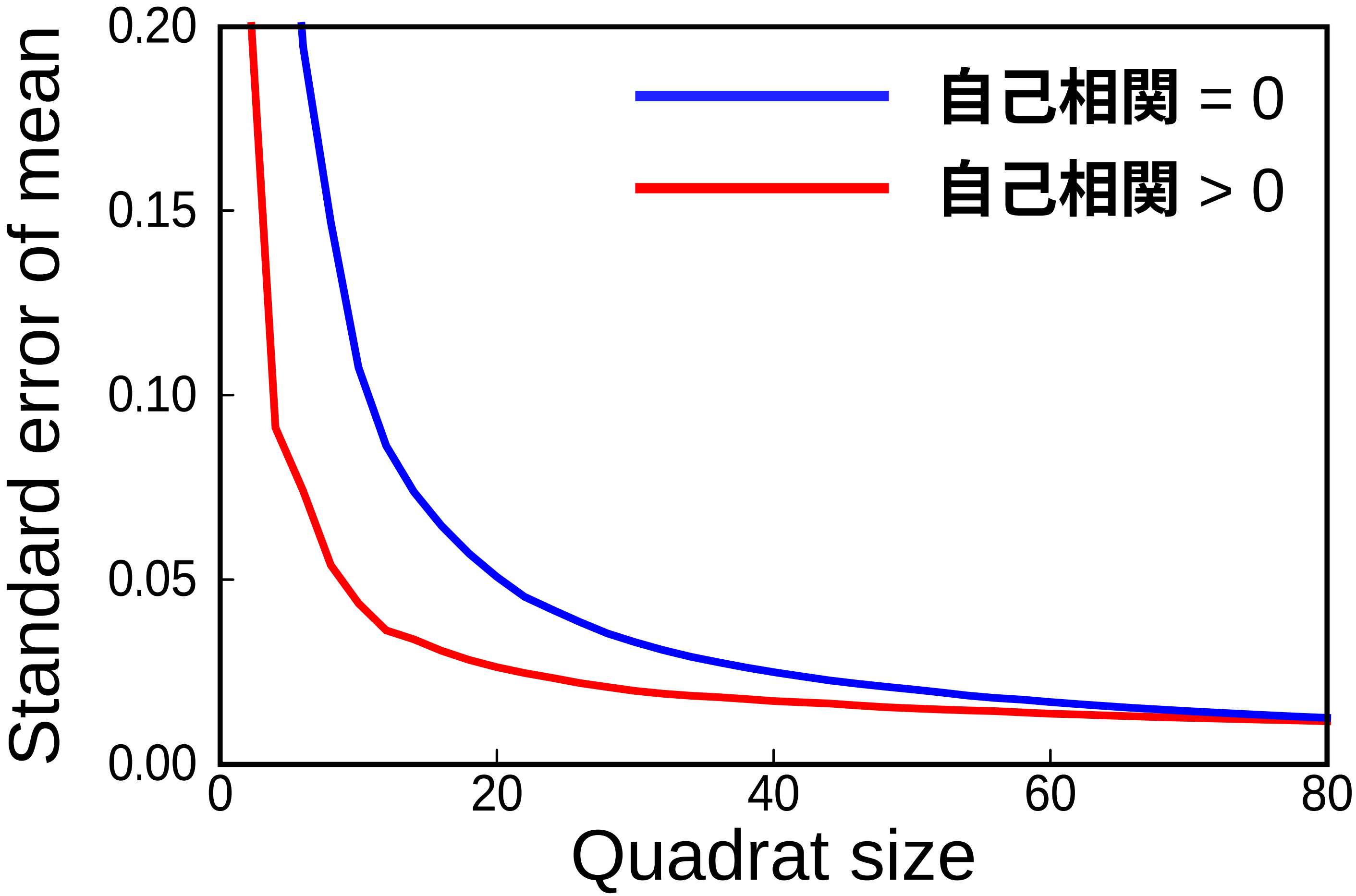
$$\mathrm{SE}_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}$$





正の自己相関を無視すると平均の標準誤差が過小評価されてしまう



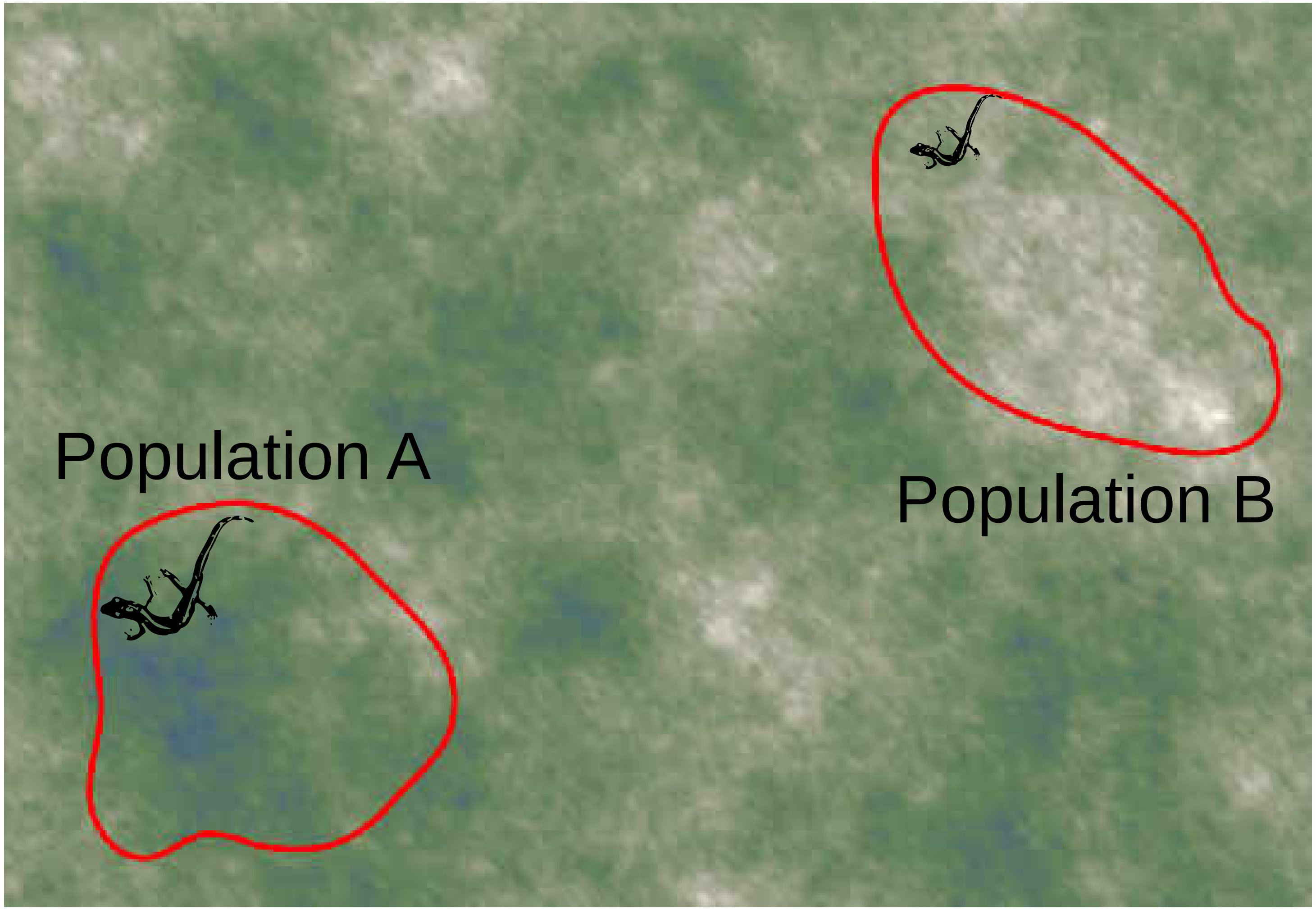


I. 分散分析と自由度

例：平均体サイズの個体群間比較

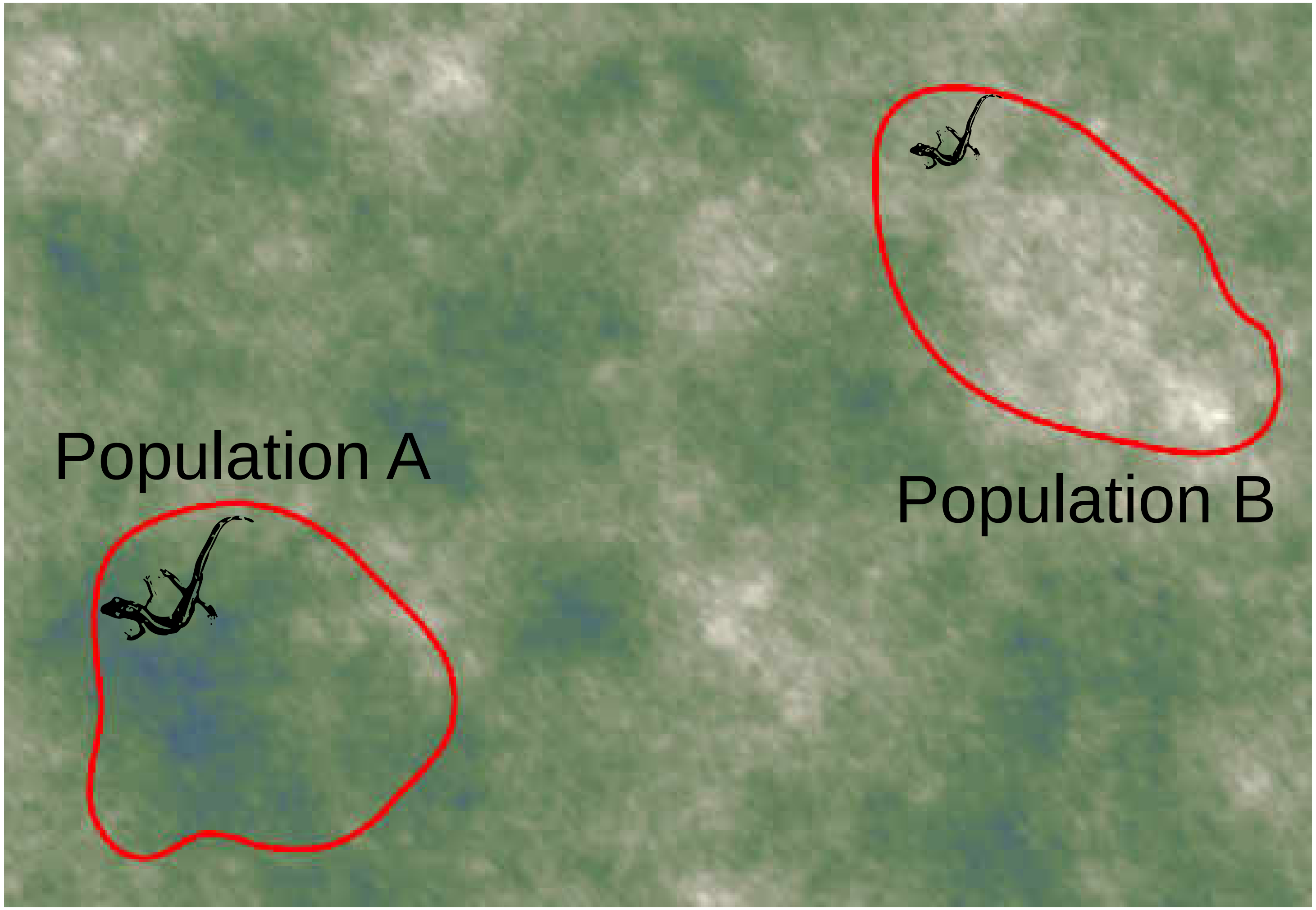
例：平均体サイズの個体群間比較

検定の帰無仮説 H_0: $\mu_A = \mu_B$



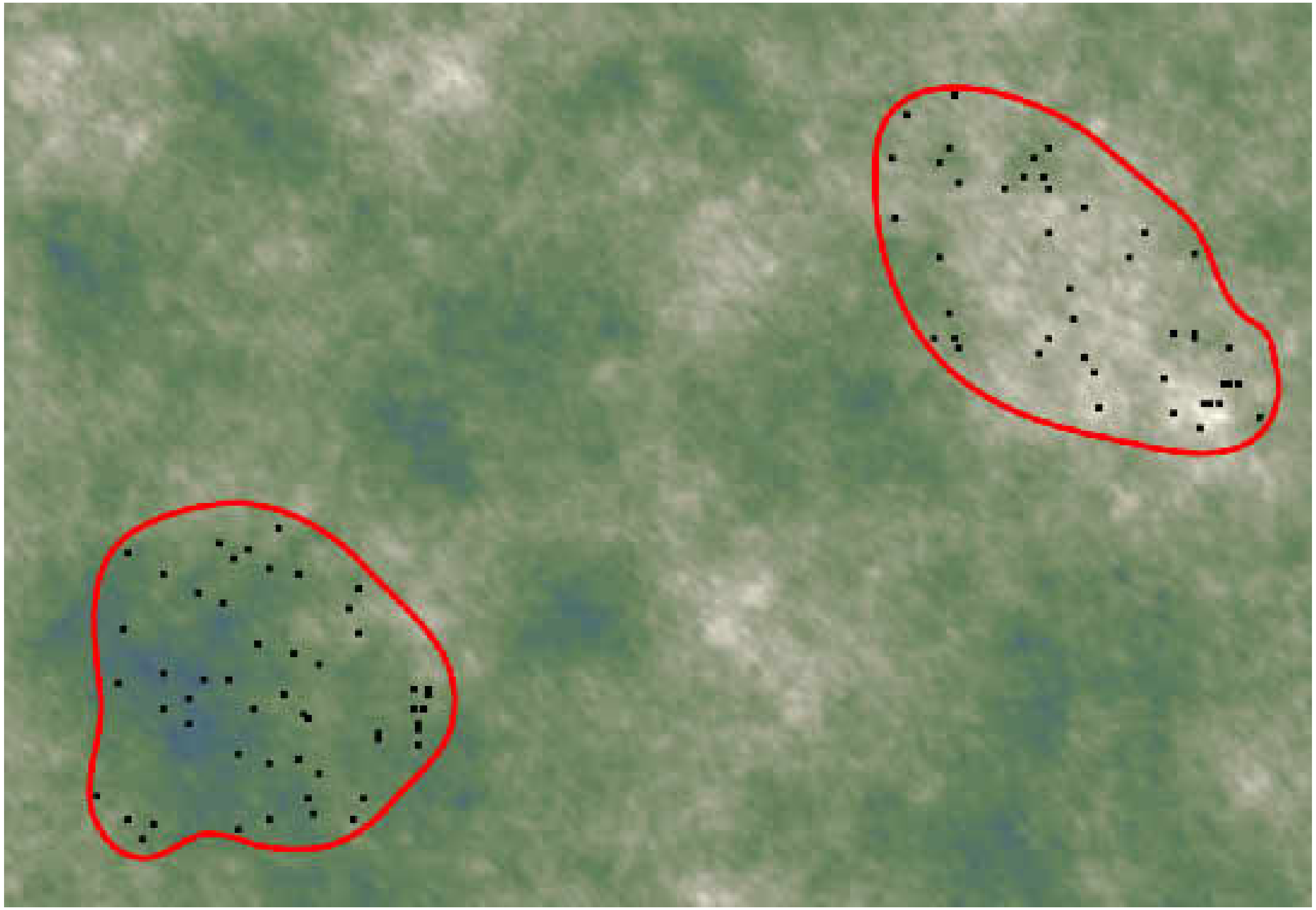
例：平均体サイズの個体群間比較

検定の帰無仮説 H_0: $\mu_A = \mu_B$



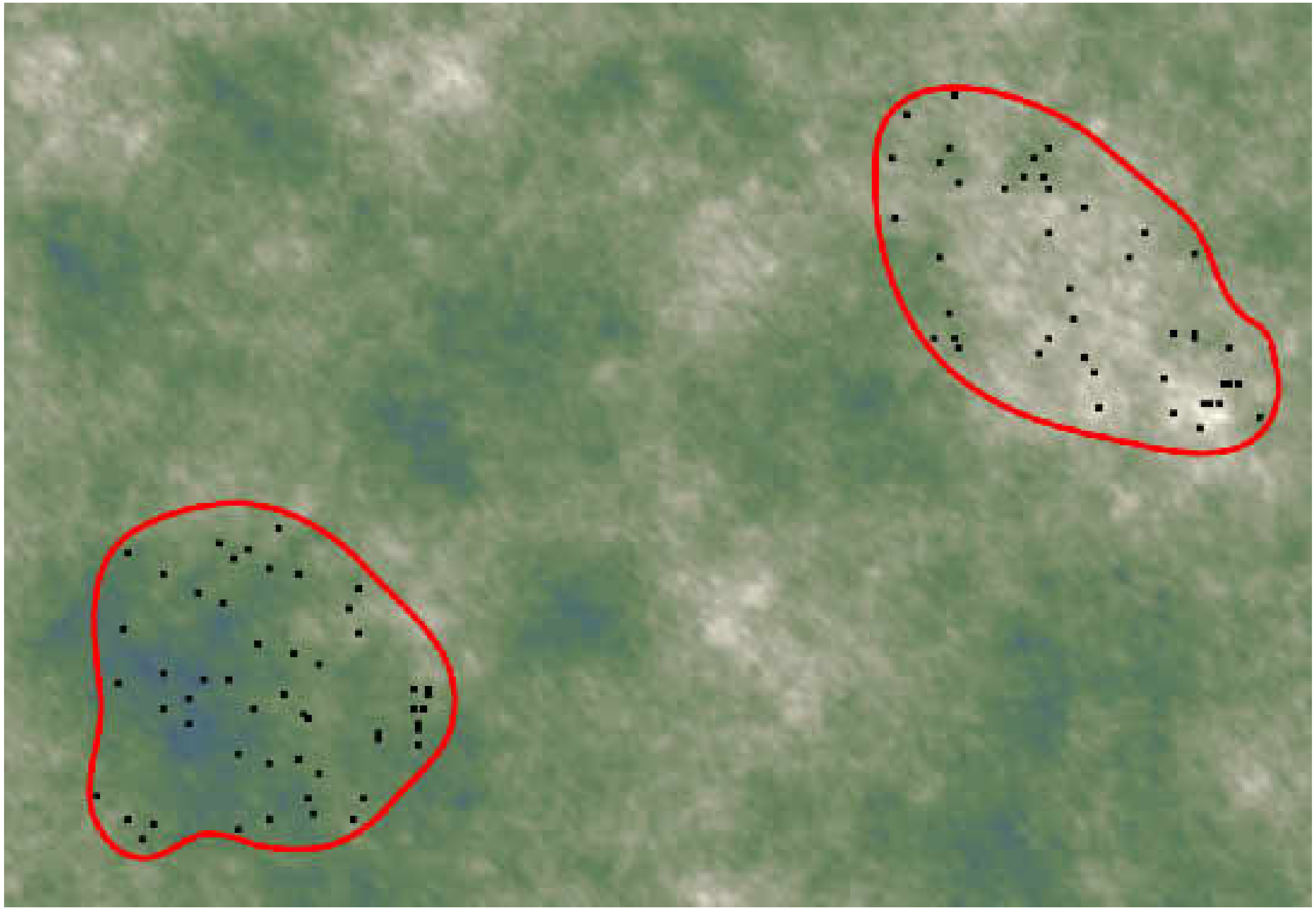
例：平均体サイズの個体群間比較

各個体群でコドラートを無作為に設置



例：平均体サイズの個体群間比較

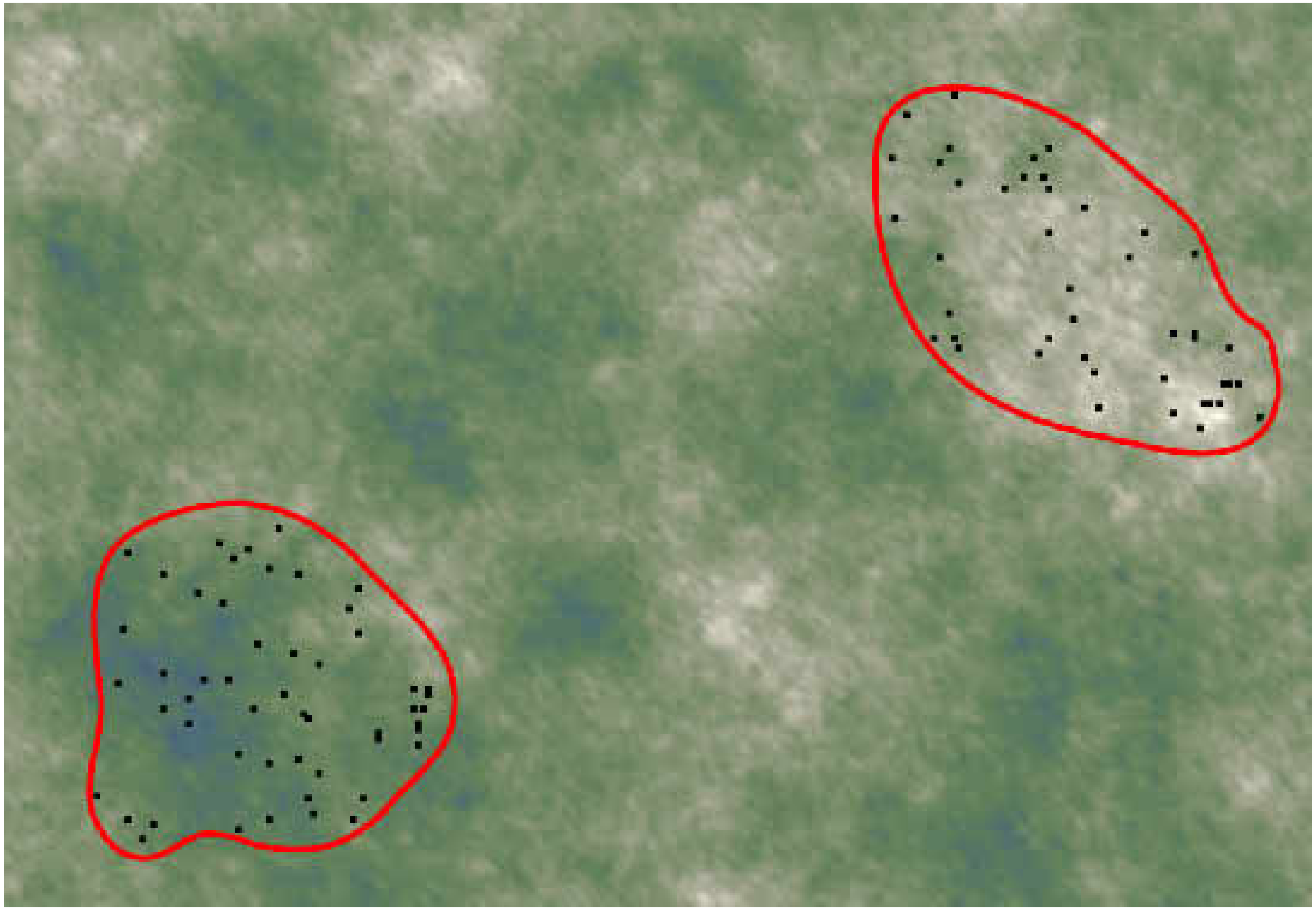
各個体群でコドラートを無作為に設置



各コドラート内にいた個体の体サイズを記録

例:平均体サイズの個体群間比較

分散分析(ANOVA)モデルを仮定して検定



各コドラート内にいた個体の体サイズを記録

Two-sample ANOVA

Sample A: n_A

Sample B: n_B

Two-sample ANOVA

Sample A: n_A

Sample B: n_B

もし帰無仮説が真ならば (i.e., $\mu_A = \mu_B$),

$$F_{obs} \sim F\,[1, n_A + n_B - 2].$$

Two-sample ANOVA

Sample A: n_A

Sample B: n_B

もし帰無仮説が真ならば (i.e., $\mu_A = \mu_B$),

$$F_{obs} \sim F\,[\underbrace{1,\ n_A+n_B-2}_{\text{Degrees of freedom}}].$$

Two-sample ANOVA

Sample A: n_A **Sample B: n_B**

もし帰無仮説が真ならば (i.e., $\mu_A = \mu_B$),

$$F_{obs} \sim F\,[\underbrace{1,\ n_A+n_B-2}_{\text{Degrees of freedom}}].$$

もし対立仮説が真ならば (i.e., $\mu_A \neq \mu_B$),
F_{obs} は $F\,[1, n_A+n_B-2]$ から期待される値よりも大きくなる.

Two-sample ANOVA

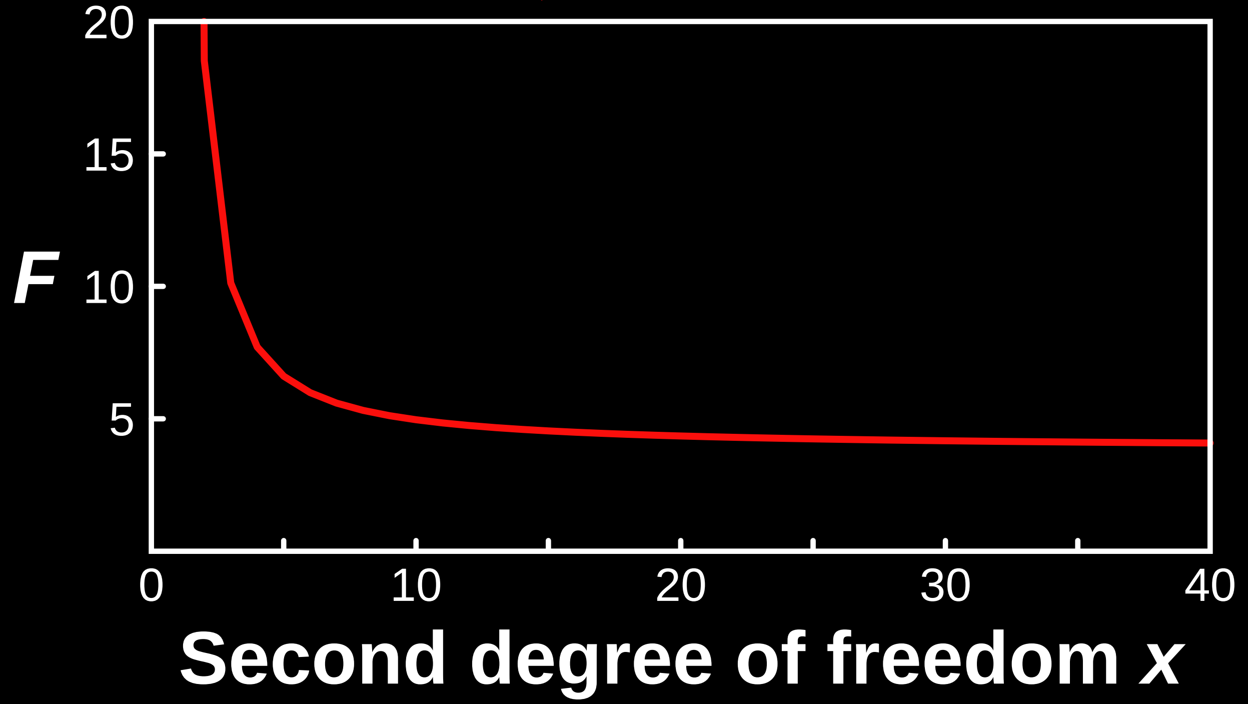
Sample A: n_A

Sample B: n_B

もし帰無仮説が真ならば (i.e., $\mu_A = \mu_B$),

$$F_{obs} \sim F\,[1, n_A+n_B-2].$$

$F\,[1,x](\alpha = 0.05)$

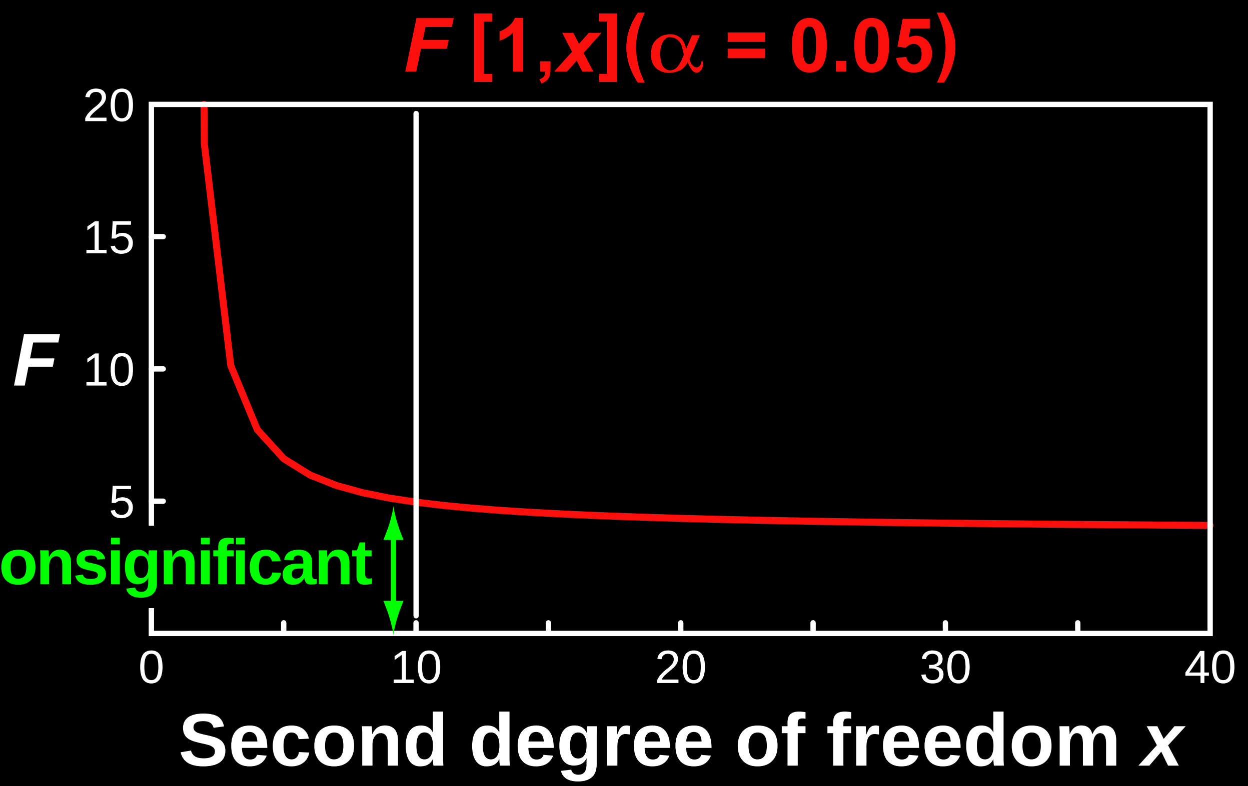


Two-sample ANOVA

Sample A: n_A **Sample B: n_B**

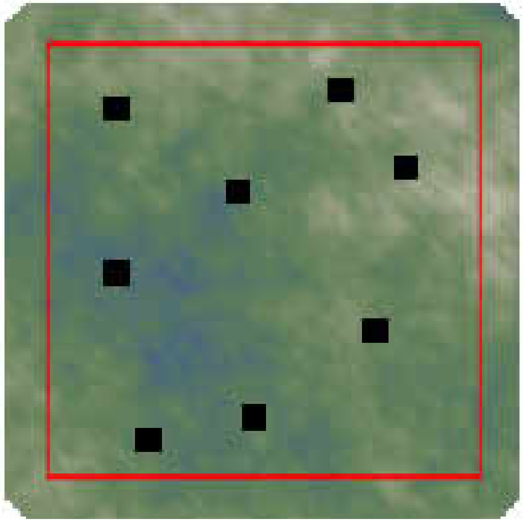
もし帰無仮説が真ならば (i.e., $\mu_A = \mu_B$),

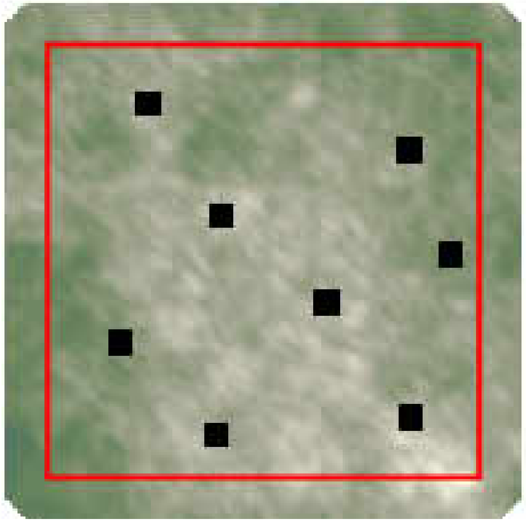
$$F_{obs} \sim F\,[1, n_A + n_B - 2].$$



有効標本数の定義

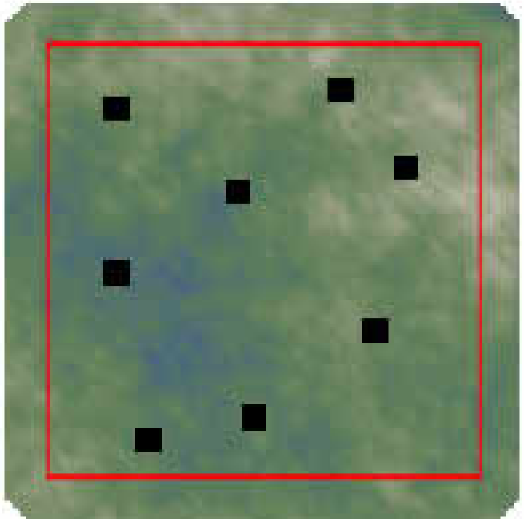
有効標本数の定義



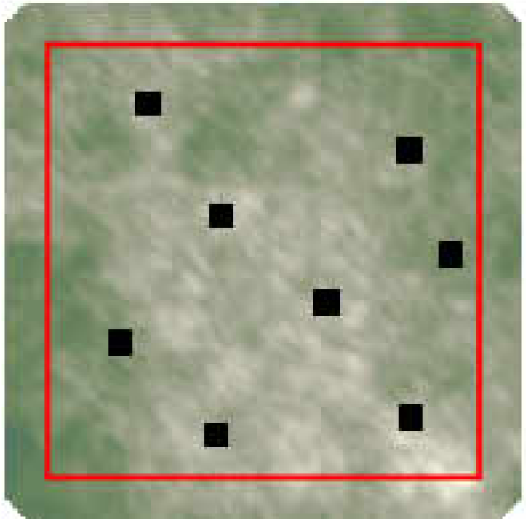


$n_A = 8$ $n_B = 8$

有効標本数の定義



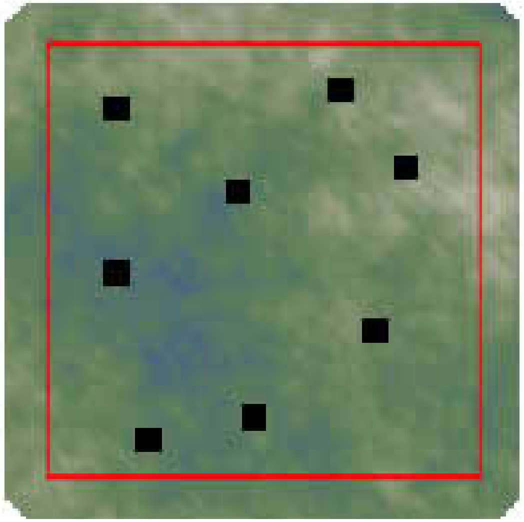
$n_A = 8$



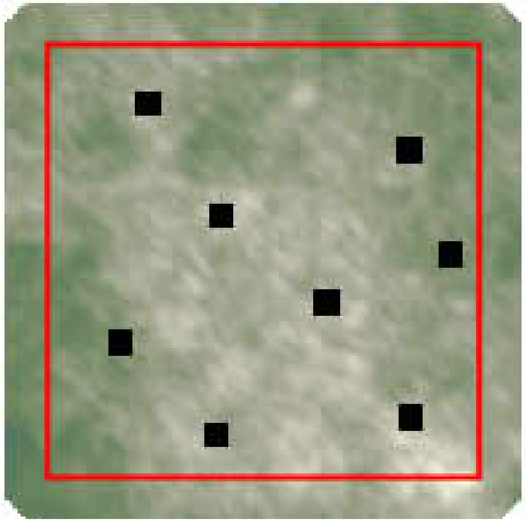
$n_B = 8$

$$df_2 = n_A + n_B - 2$$

有効標本数の定義



$n_A = 8$

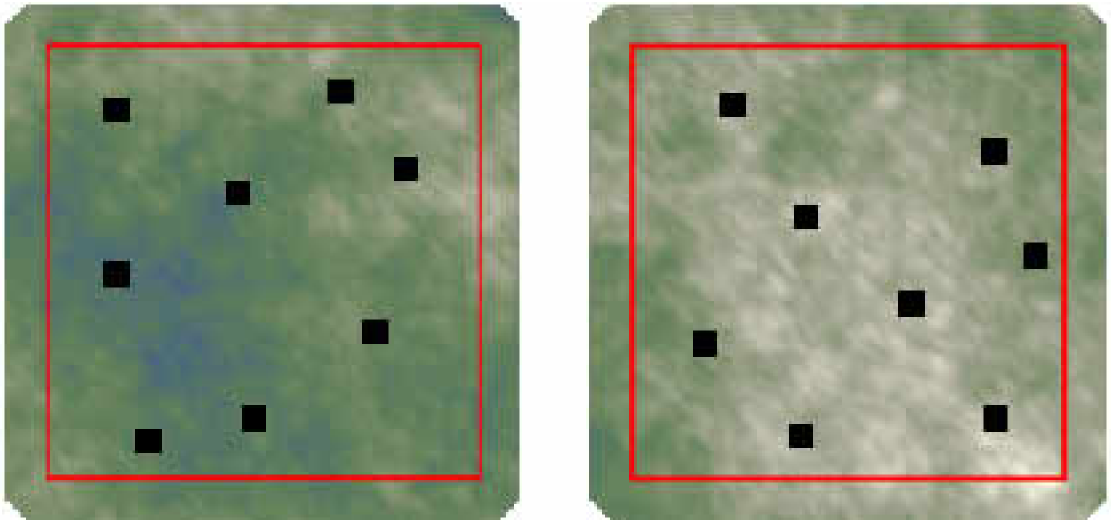


$n_B = 8$

$$df_2 = n_A + n_B - 2$$

pseudoreplication

有効標本数の定義



$n_A = 8$　　$n_B = 8$

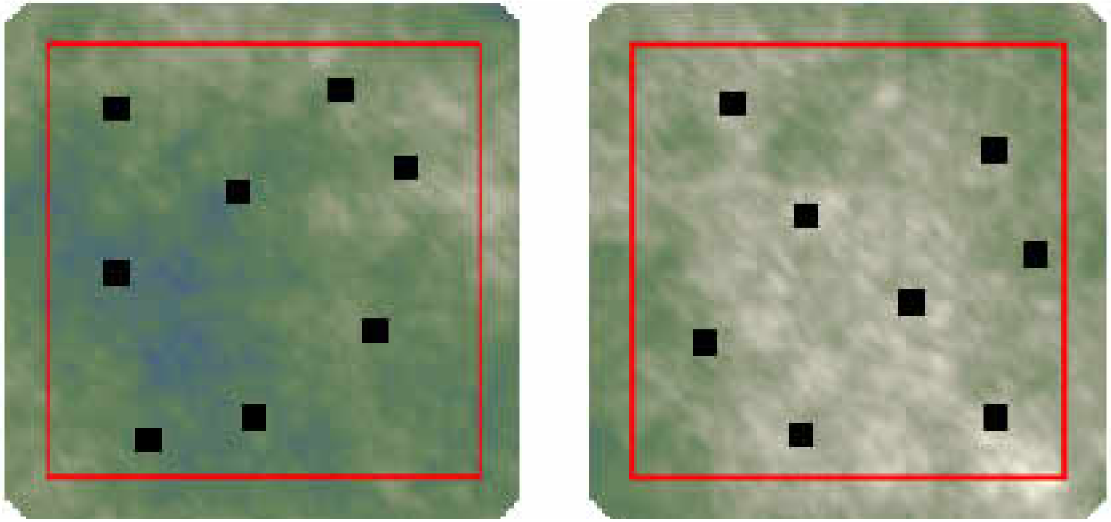
$$df_2 = n_A + n_B - 2$$

⇩

pseudoreplication

自己相関による効果を差し引いて、「独立とみなせる標本の相当数」を有効標本数 n' として定義する．

有効標本数の定義



$$df_2 = n_A + n_B - 2$$

⇩

pseudoreplication

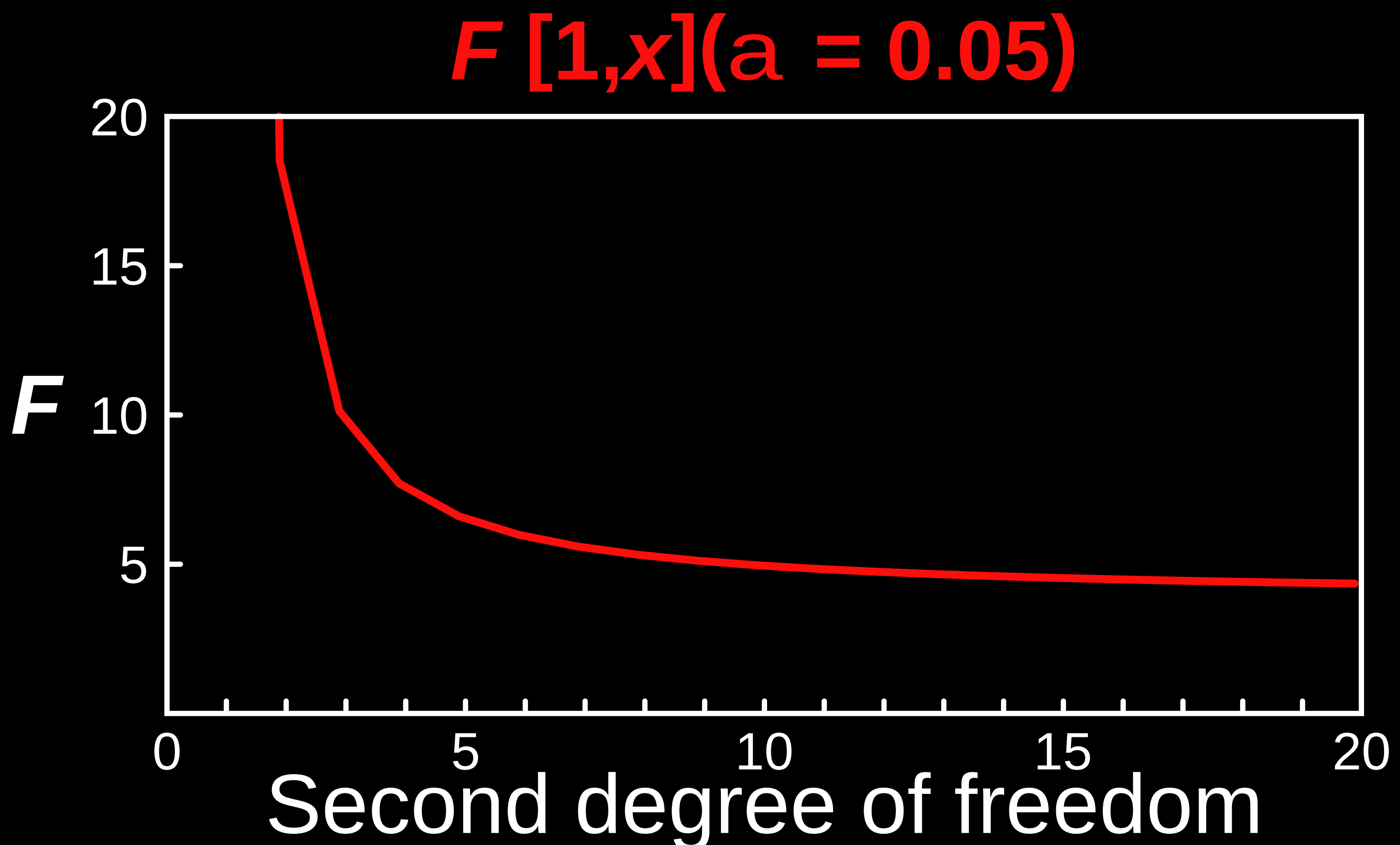
$n_A = 8$　　$n_B = 8$

自己相関による効果を差し引いて、「独立とみなせる標本の相当数」を有効標本数 n' として定義する.

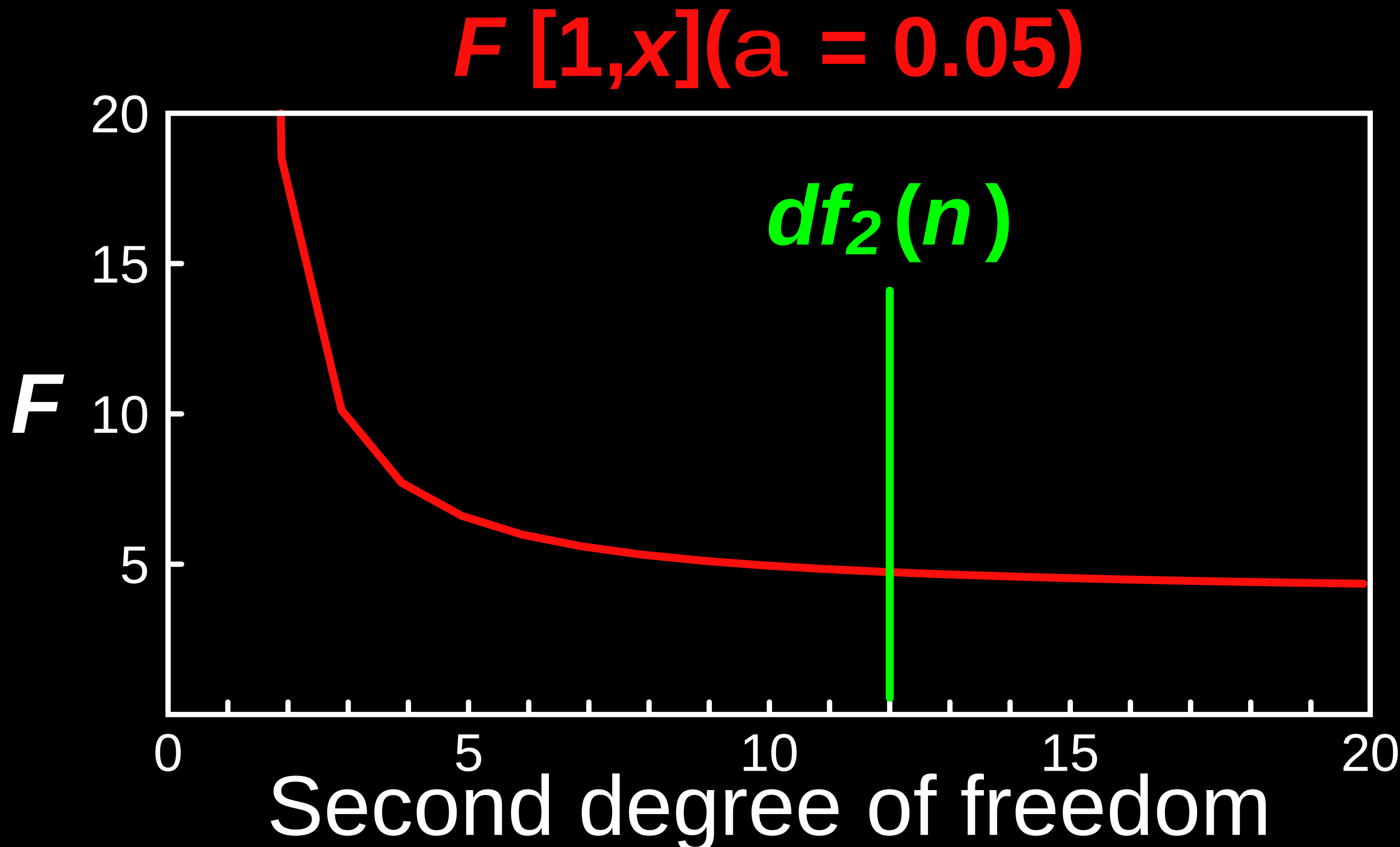
$$df_2 = n_A' + n_B' - 2$$

F-test based on overestimated *df*

F-test based on overestimated *df*

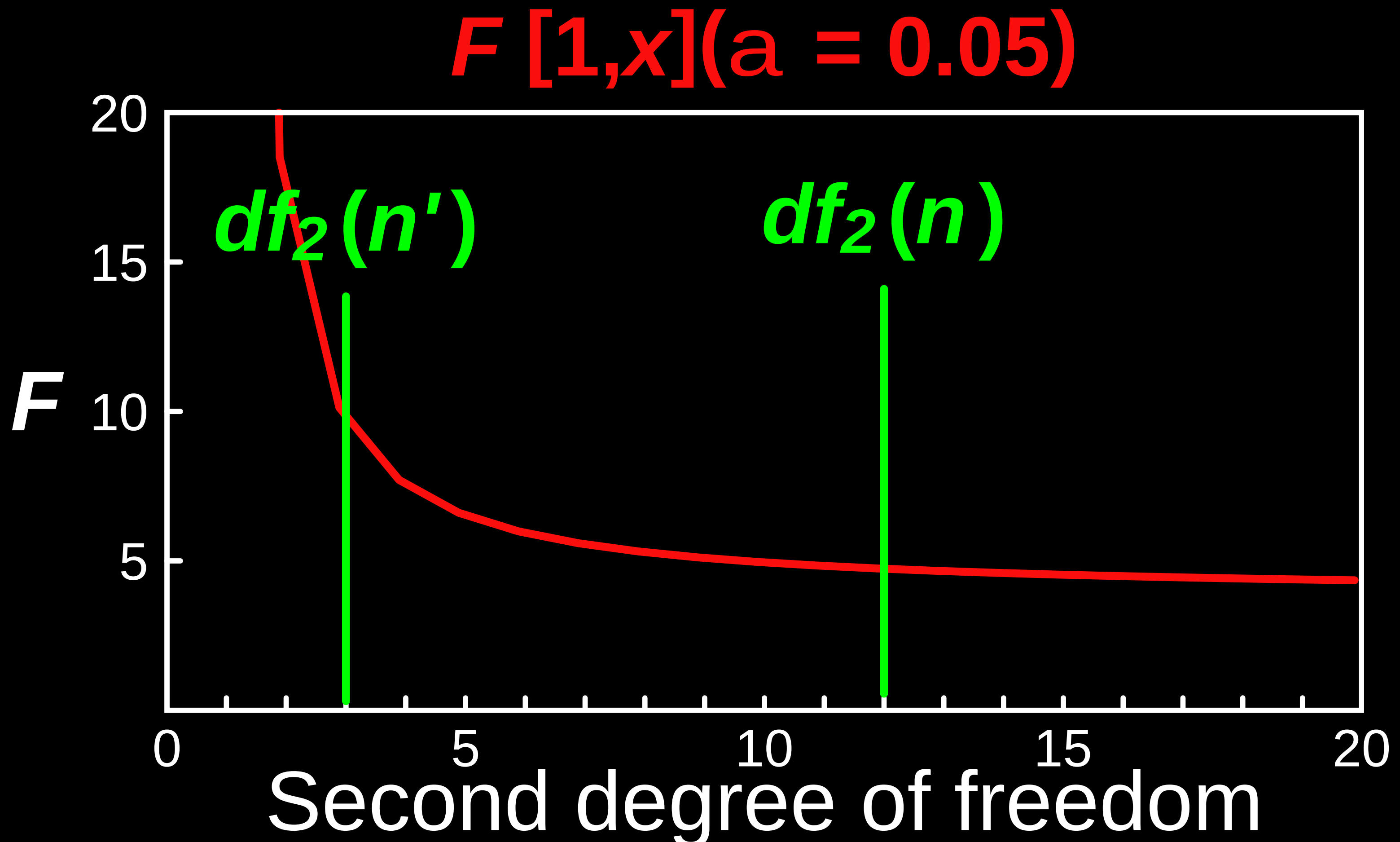


F-test based on overestimated *df*



n : sample size

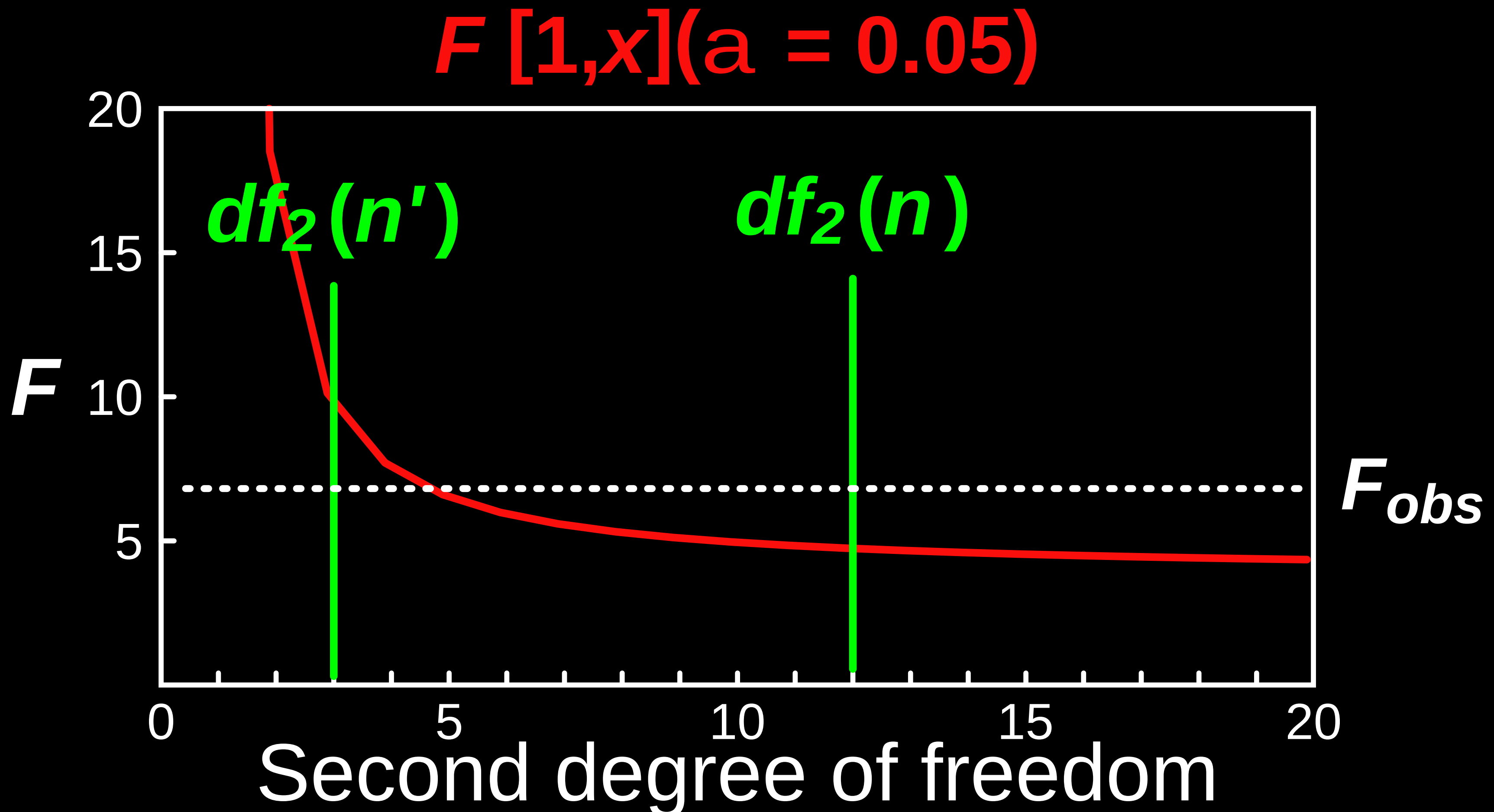
F-test based on overestimated *df*



n **: sample size**

n' **: effective sample size**

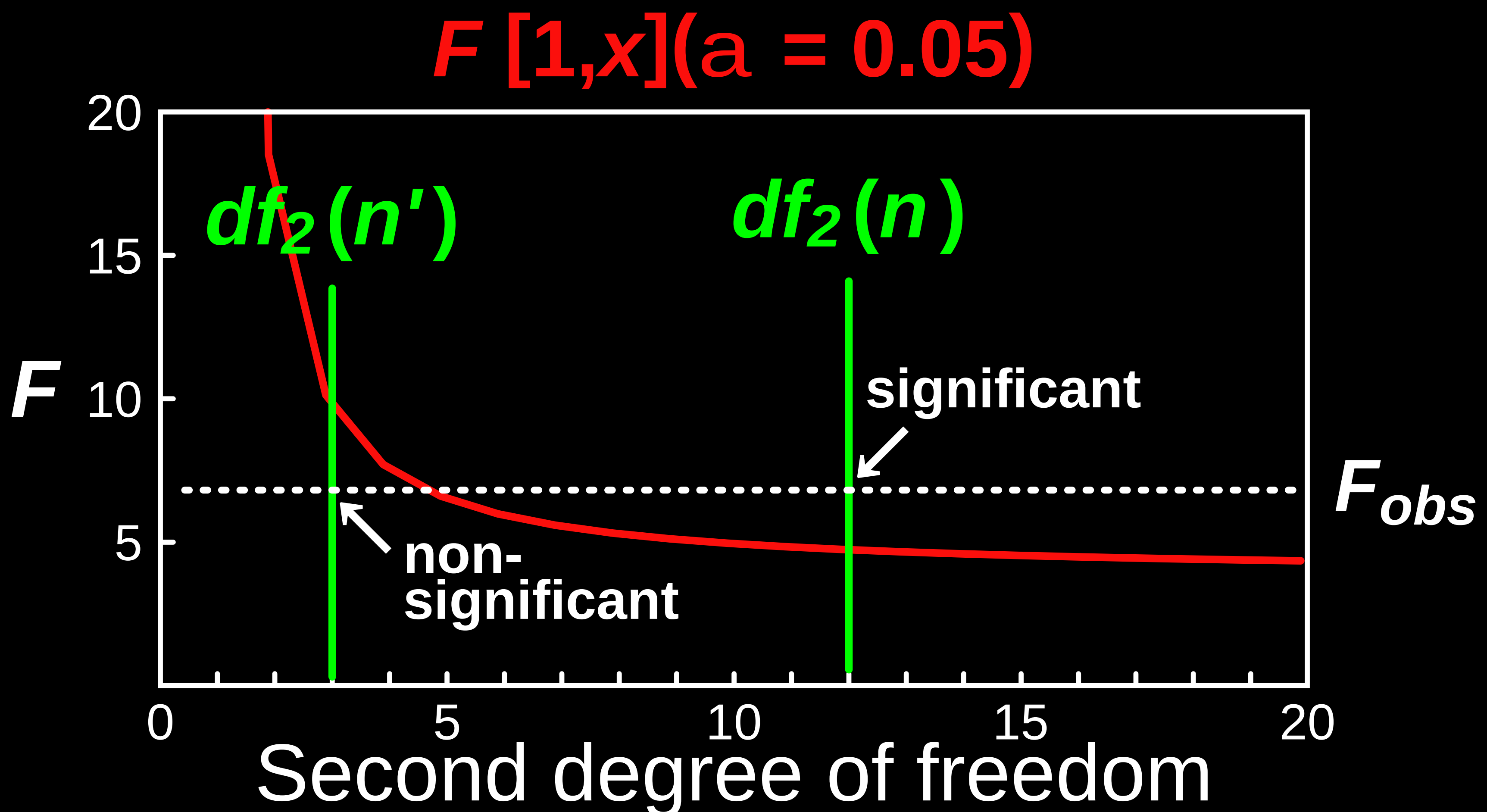
F-test based on overestimated *df*



n : sample size

n' : effective sample size

F-test based on overestimated *df*



n **: sample size**

n' **: effective sample size**

General Linear Model **(Univariate Case)**
一般線型モデル

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\,\beta + \varepsilon$$

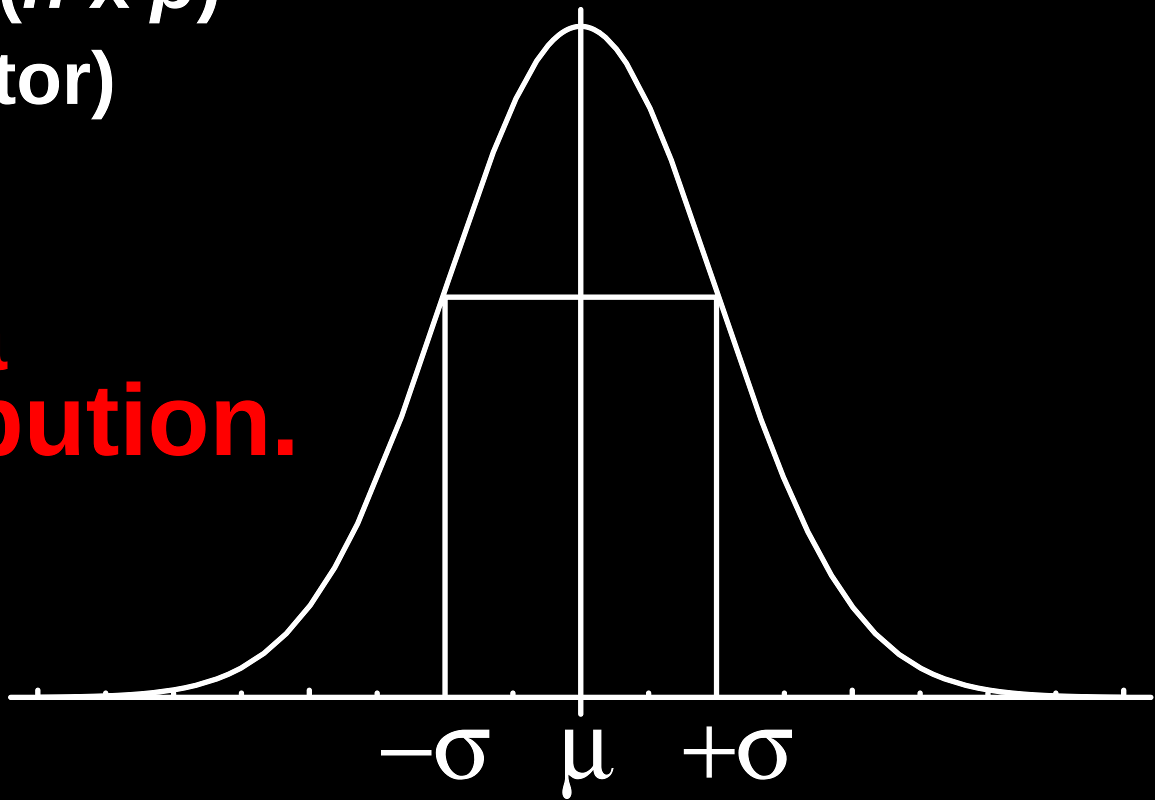
Error term (*n* x 1 vector) $\sim N(0,\sigma^2)$

Parameters (*p* x 1 vector)

Design matrix (*n* x *p*)

Observation (*n* x 1 vector)

Residuals follow a normal distribution.



General Linear Model **(Univariate Case)**

誤差項に関する仮定：

1. 正規性(normality)
2. 等分散性(Homoscedasticity)

General Linear Model **(Univariate Case)**

誤差項に関する仮定：

1. **正規性(normality)**
2. **等分散性(Homoscedasticity)**
3. **独立性(Independence)**

General Linear Model **(Univariate Case)**

誤差項に関する仮定：

1. **正規性(normality)**
2. **等分散性(Homoscedasticity)**
3. **独立性(Independence)**

$$E(e_{ij}\, e_{i'j'}) = 0 \text{ for } j \neq j'$$

General Linear Model (Univariate Case)

誤差項に関する仮定：

1. 正規性(normality)
2. 等分散性(Homoscedasticity)
3. 独立性(Independence)

$$E(e_{ij}\, e_{i'j'}) = 0 \text{ for } j \neq j'$$

残差の自己相関が正

↓

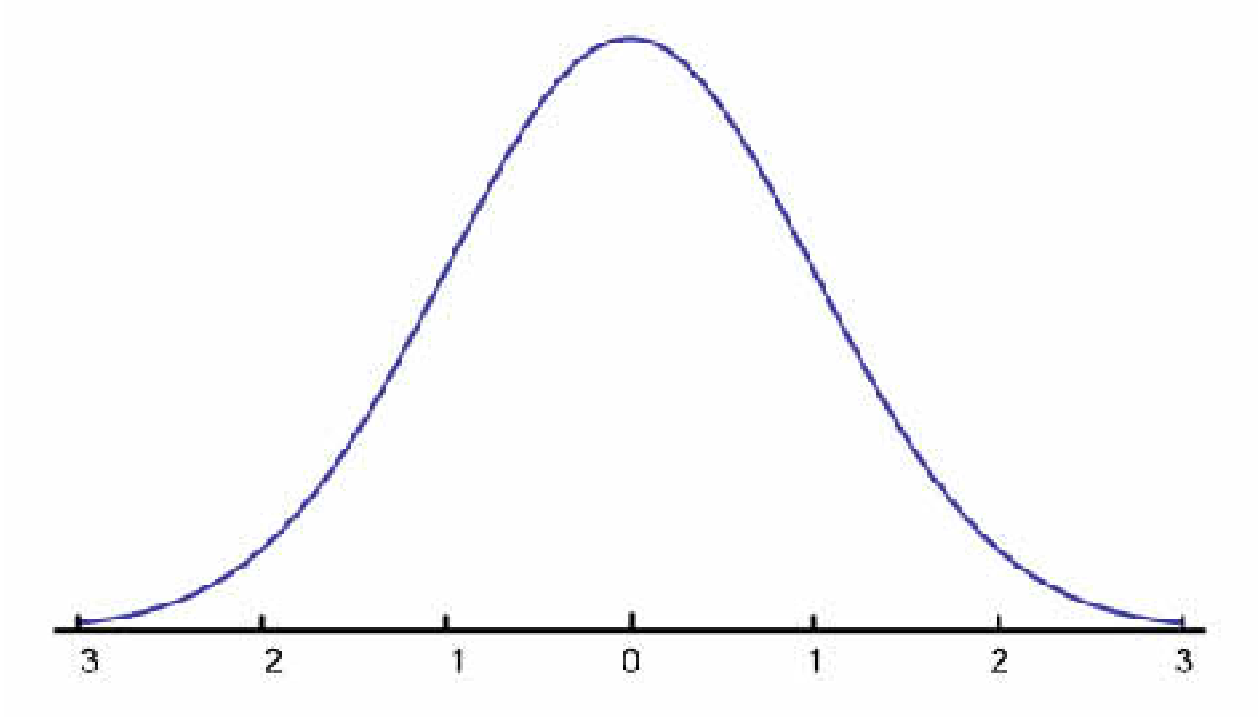
自由度が過大評価(pseudoreplication)

II. 自由度の調整

準備１：多次元正規分布

準備１:多次元正規分布

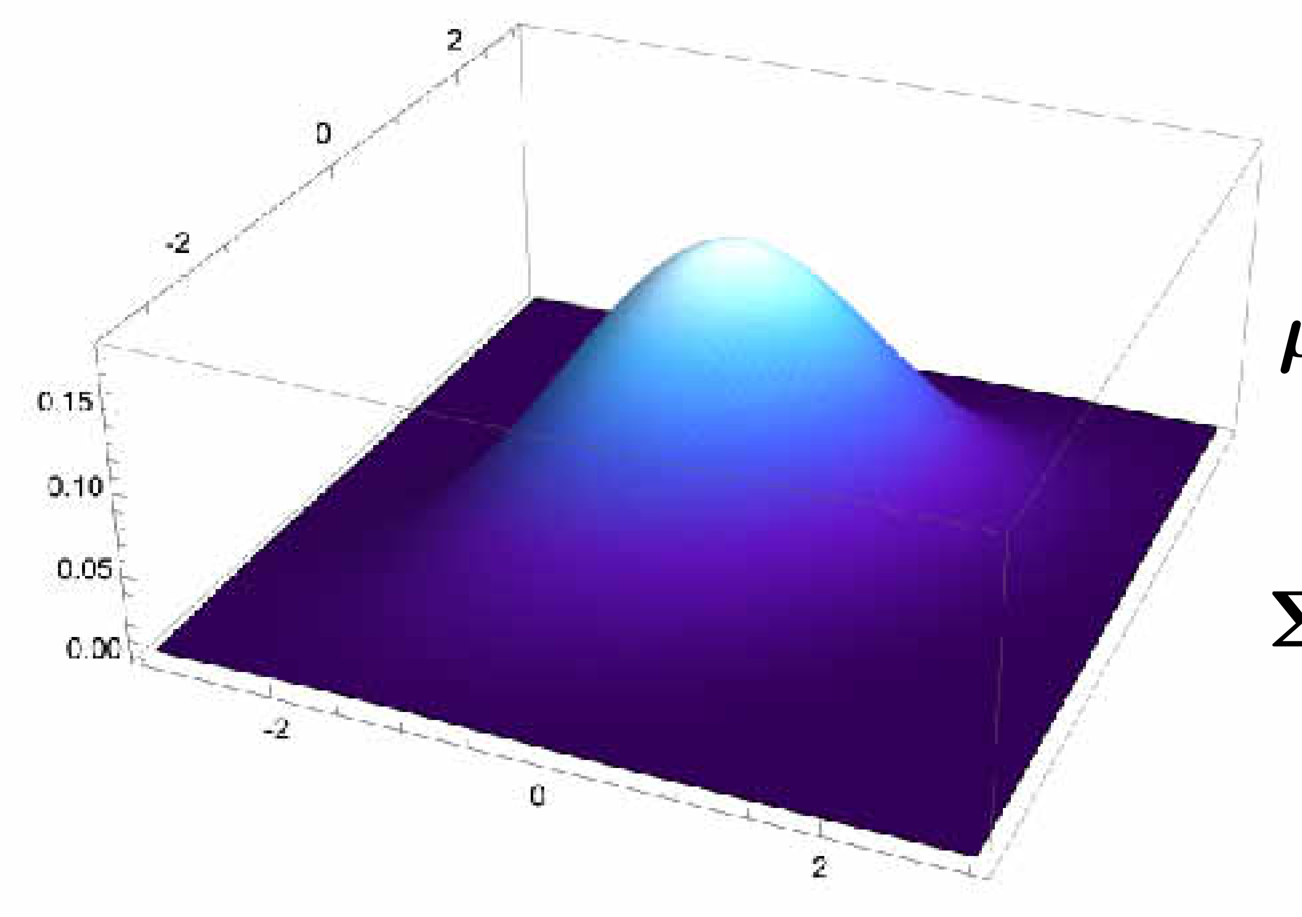
１次元：パラメータは平均と分散の２個



$$\{\mu, \sigma^2\}$$

準備１：多次元正規分布

２次元：パラメータは５個(平均と共分散行列)

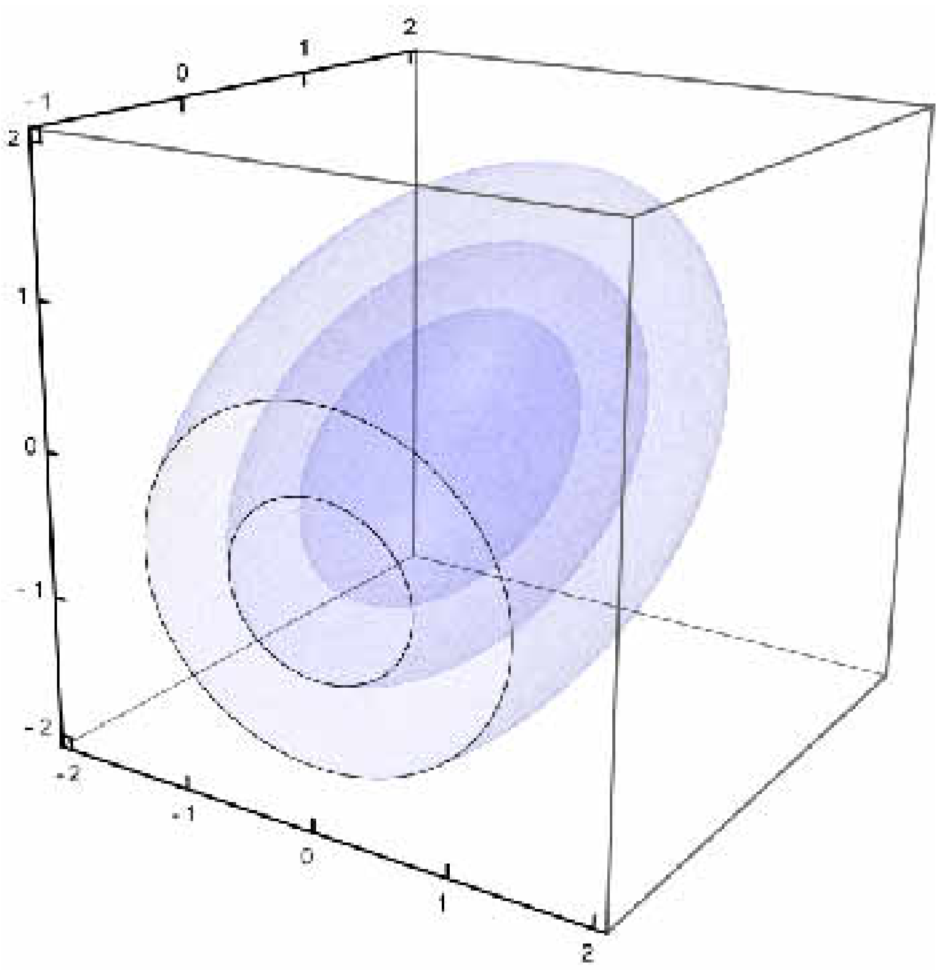


$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

準備１：多次元正規分布

３次元：パラメータは９個(平均と共分散行列)



$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix}$$

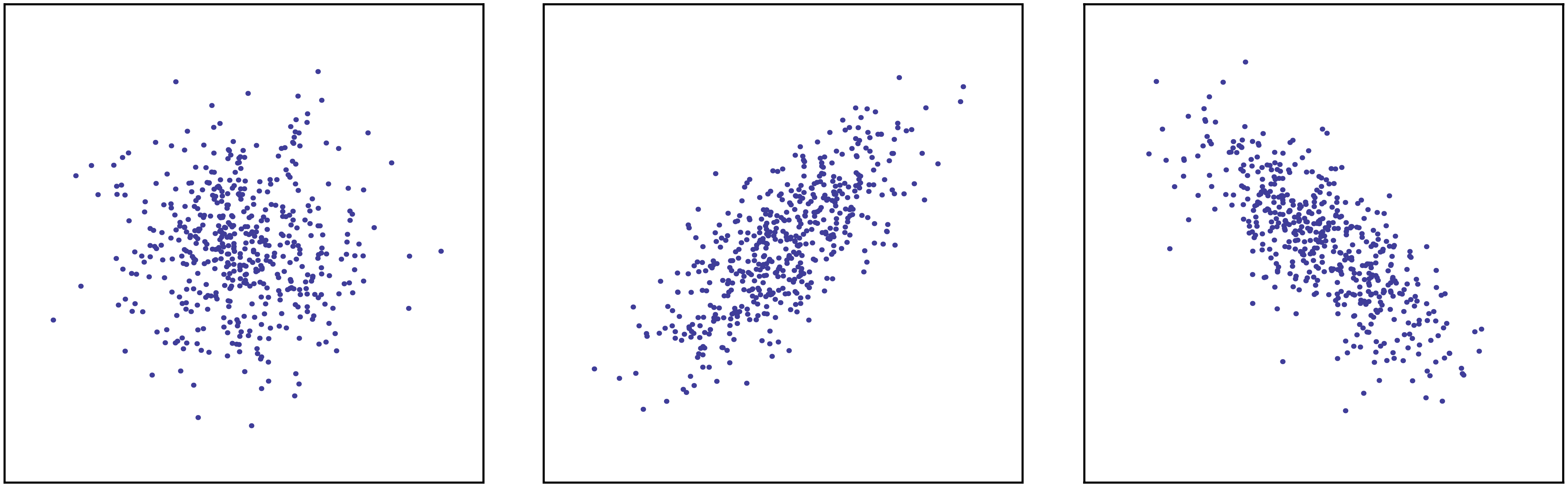
$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \rho_{13}\sigma_1\sigma_3 \\ \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 & \rho_{23}\sigma_2\sigma_3 \\ \rho_{13}\sigma_1\sigma_3 & \rho_{23}\sigma_2\sigma_3 & \sigma_3^2 \end{pmatrix}$$

準備１：多次元正規分布

相関 ρ の意味 ― 直感的な理解

準備１：多次元正規分布

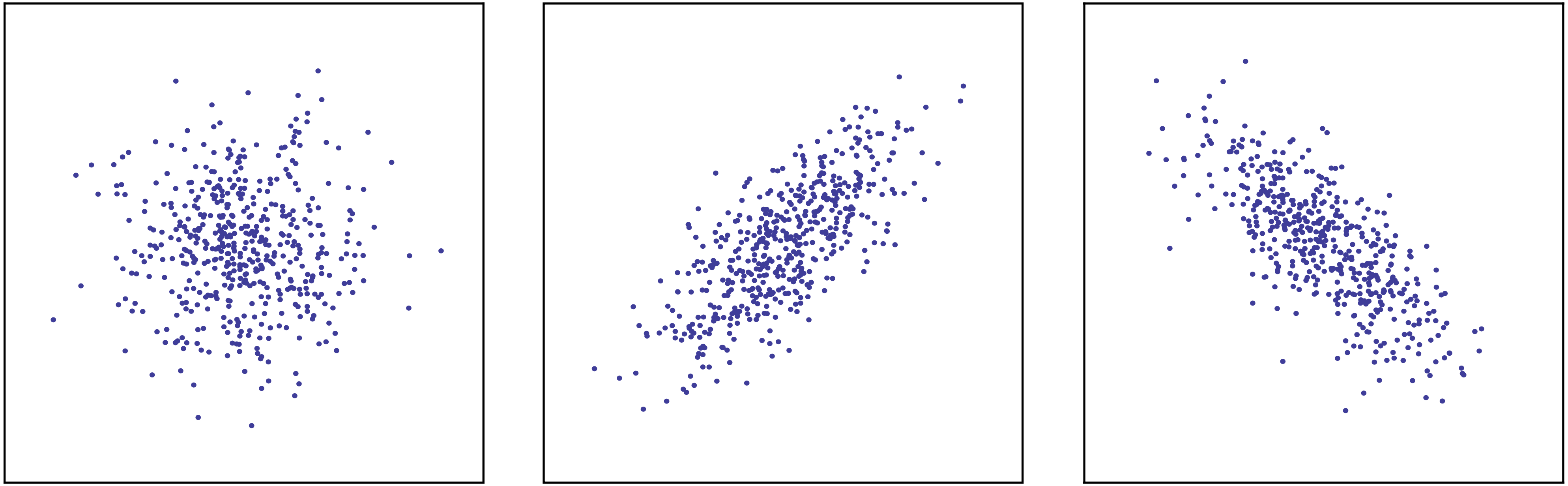
相関ρの意味 — 直感的な理解



$\rho = 0$　　$\rho > 0$　　$\rho < 0$

準備１：多次元正規分布

相関ρの意味 ― 直感的な理解



$\rho = 0$　　$\rho > 0$　　$\rho < 0$

残差の自己相関をモデルに組み込む際に利用可

準備2：$V[\bar{x}] = \sigma^2/n \;\; \text{where} \;\; \boldsymbol{x} \sim N(\mu, \sigma^2)$

準備2：$V[\bar{x}] = \sigma^2/n$ where $\boldsymbol{x} \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$V\left[\bar{x}\right] = V\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right] = E\left[\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu\right)^2\right]$$

$$\left(\because V(X) = E\left[(X-\mu)^2\right]\right)$$

$$= E\left[\frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - n\mu\right)^2\right] = E\left[\frac{1}{n^2}\left\{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)\right\}^2\right]$$

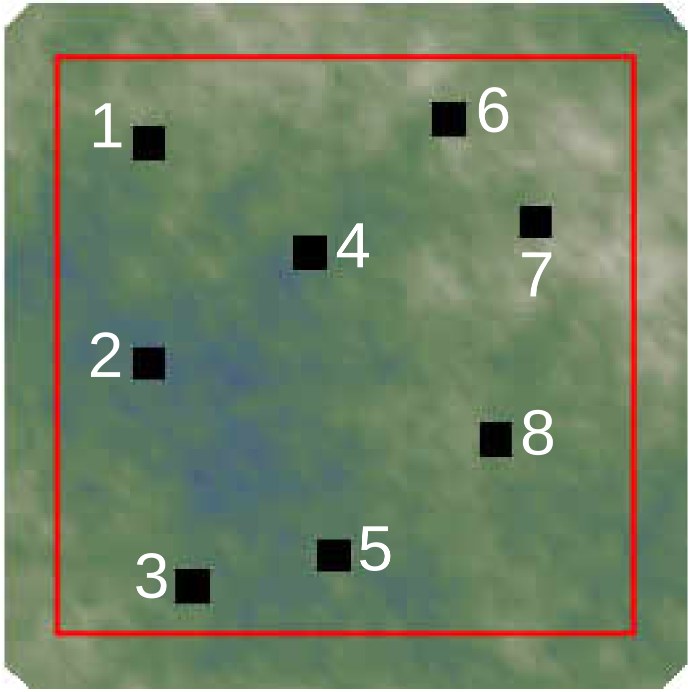
$$= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} E\left[(x_i-\mu)^2\right] + \underbrace{\frac{1}{n^2}\sum_{i\neq j} E\left[x_i - \mu\right] E\left[x_j - \mu\right]}_{=0}$$

$$\because \boldsymbol{x} \underset{\text{i.i.d.}}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$$

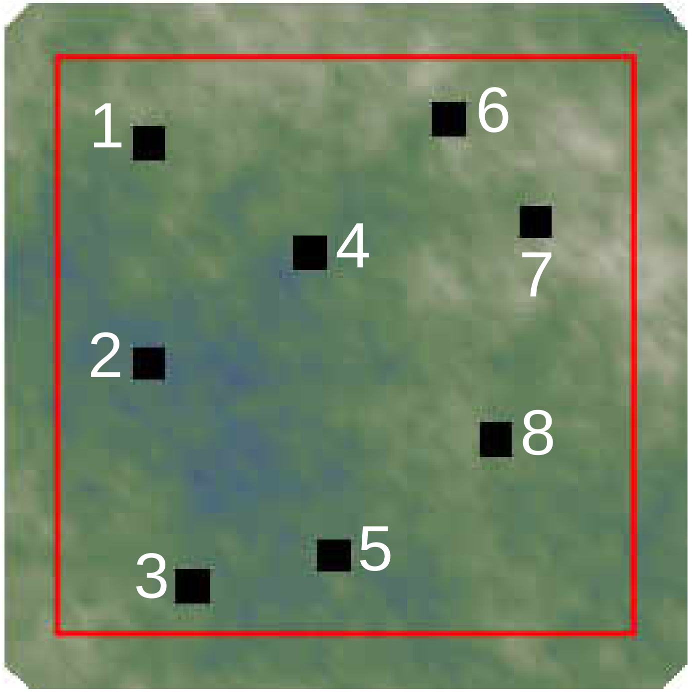
$$= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} E\left[(x_i-\mu)^2\right] = \sigma^2/n$$

有効標本数の計算方法

有効標本数の計算方法

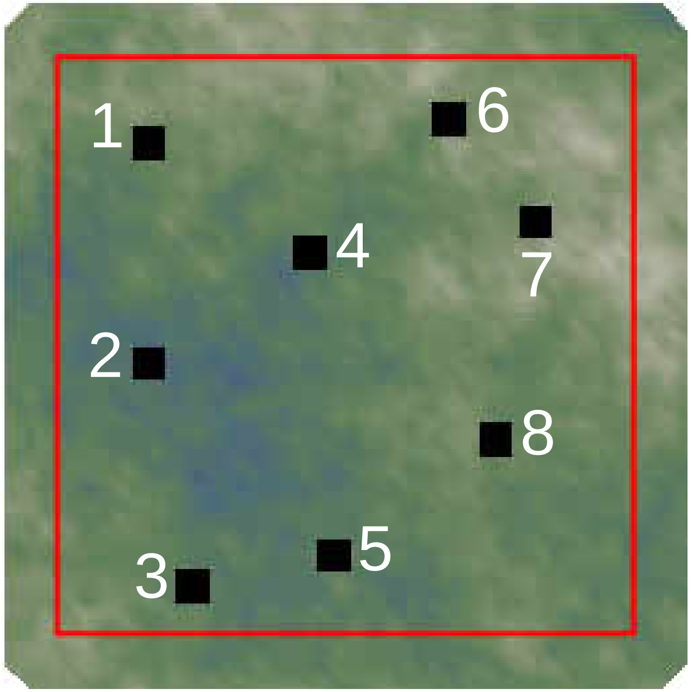


有効標本数の計算方法



観測値 x_i $(i = 1, 2, ..., 8)$ が共分散行列 Σ によって関係づけられる８個の正規分布 $N(\mu_i, \sigma^2)$に従う確率変数であると考える.

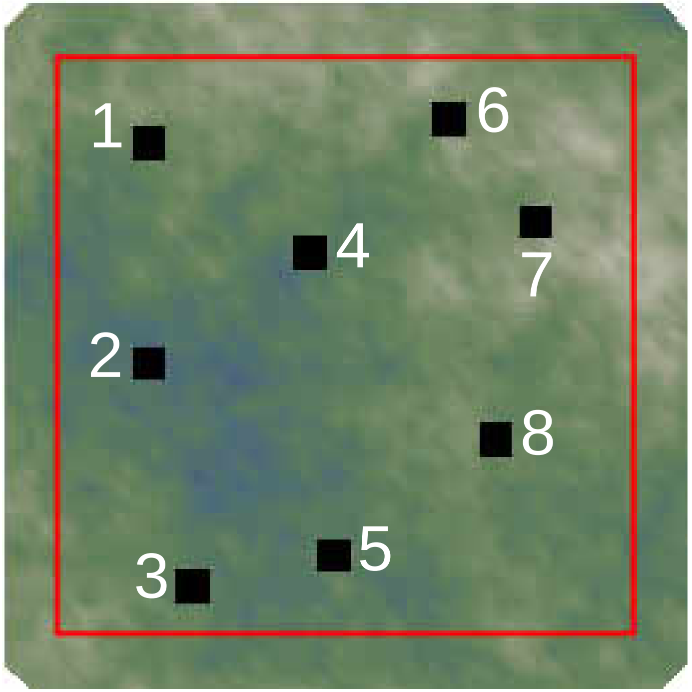
有効標本数の計算方法



観測値 x_i (i = 1, 2, ..., 8) が共分散行列 Σ によって関係づけられる８個の正規分布 $N(\mu_i, \sigma^2)$に従う確率変数であると考える.

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \mathrm{var}(x_1) & \mathrm{cov}(x_1, x_2) & \cdots & \mathrm{cov}(x_1, x_8) \\ \mathrm{cov}(x_2, x_1) & \mathrm{var}(x_2) & \cdots & \mathrm{cov}(x_2, x_8) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{cov}(x_8, x_1) & \mathrm{cov}(x_8, x_2) & \cdots & \mathrm{var}(x_8) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{18} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{28} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{81} & \sigma_{82} & \cdots & \sigma_{88} \end{bmatrix}$$

有効標本数の計算方法



観測値 x_i $(i = 1, 2, ..., 8)$ が共分散行列 Σ によって関係づけられる８個の正規分布 $N(\mu_i, \sigma^2)$に従う確率変数であると考える.

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \mathrm{var}(x_1) & \mathrm{cov}(x_1, x_2) & \cdots & \mathrm{cov}(x_1, x_8) \\ \mathrm{cov}(x_2, x_1) & \mathrm{var}(x_2) & \cdots & \mathrm{cov}(x_2, x_8) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{cov}(x_8, x_1) & \mathrm{cov}(x_8, x_2) & \cdots & \mathrm{var}(x_8) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{18} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{28} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{81} & \sigma_{82} & \cdots & \sigma_{88} \end{bmatrix}$$

多次元正規分布で自己相関ごとモデル化

有効標本数の計算方法

$$V\left[\bar{x}\right] = V\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right] = \frac{1}{n^2}E\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(x_i - \mu_i\right)\left(x_j - \mu_j\right)\right]$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \mathrm{var}(x_1) & \mathrm{cov}(x_1, x_2) & \cdots & \mathrm{cov}(x_1, x_8) \\ \mathrm{cov}(x_2, x_1) & \mathrm{var}(x_2) & \cdots & \mathrm{cov}(x_2, x_8) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{cov}(x_8, x_1) & \mathrm{cov}(x_8, x_2) & \cdots & \mathrm{var}(x_8) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{18} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{28} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{81} & \sigma_{82} & \cdots & \sigma_{88} \end{bmatrix}$$

多次元正規分布で自己相関ごとモデル化

有効標本数の計算方法

$$V[\bar{x}] = V\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right] = \frac{1}{n^2}E\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j)\right]$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \mathrm{var}(x_1) & \mathrm{cov}(x_1, x_2) & \cdots & \mathrm{cov}(x_1, x_8) \\ \mathrm{cov}(x_2, x_1) & \mathrm{var}(x_2) & \cdots & \mathrm{cov}(x_2, x_8) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{cov}(x_8, x_1) & \mathrm{cov}(x_8, x_2) & \cdots & \mathrm{var}(x_8) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{18} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{28} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{81} & \sigma_{82} & \cdots & \sigma_{88} \end{bmatrix}$$

多次元正規分布で自己相関ごとモデル化

有効標本数の計算方法

$$V[\bar{x}] = V\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right] = \frac{1}{n^2} E\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j)\right]$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} = \sigma^2 / n'$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \mathrm{var}(x_1) & \mathrm{cov}(x_1, x_2) & \cdots & \mathrm{cov}(x_1, x_8) \\ \mathrm{cov}(x_2, x_1) & \mathrm{var}(x_2) & \cdots & \mathrm{cov}(x_2, x_8) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{cov}(x_8, x_1) & \mathrm{cov}(x_8, x_2) & \cdots & \mathrm{var}(x_8) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{18} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{28} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{81} & \sigma_{82} & \cdots & \sigma_{88} \end{bmatrix}$$

多次元正規分布で自己相関ごとモデル化

有効標本数の計算方法

$$V[\bar{x}] = V\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right] = \frac{1}{n^2}E\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j)\right]$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij} = \sigma^2/n' \quad \therefore n' = n^2\sigma^2 \Big/ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}$$

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \mathrm{var}(x_1) & \mathrm{cov}(x_1, x_2) & \cdots & \mathrm{cov}(x_1, x_8) \\ \mathrm{cov}(x_2, x_1) & \mathrm{var}(x_2) & \cdots & \mathrm{cov}(x_2, x_8) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{cov}(x_8, x_1) & \mathrm{cov}(x_8, x_2) & \cdots & \mathrm{var}(x_8) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{18} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{28} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{81} & \sigma_{82} & \cdots & \sigma_{88} \end{bmatrix}$$

多次元正規分布で自己相関ごとモデル化

ここまでのまとめ

ここまでのまとめ

・コドラート調査：観測値は互いに正の自己相関を持つ

ここまでのまとめ

- コドラート調査：観測値は互いに正の自己相関を持つ
- 自己相関を無視したANOVAでは type I error rate が↑

ここまでのまとめ

- コドラート調査：観測値は互いに正の自己相関を持つ
- 自己相関を無視したANOVAでは type I error rate が↑
- 有効標本数 *n'* から計算した自由度を用いればよい

Collecting data ⇨ **Estimating Σ** ⇨ **Calculating *n'*** ⇨ **Df-adjusted *F*-test**

ここまでのまとめ

- コドラート調査：観測値は互いに正の自己相関を持つ
- 自己相関を無視したANOVAでは type I error rate が↑
- 有効標本数 ***n'*** から計算した自由度を用いればよい
- ***n'*** の計算には共分散行列 Σ の指定が必要

Collecting data ⇨ **Estimating Σ** ⇨ **Calculating *n'*** ⇨ **Df-adjusted *F*-test**

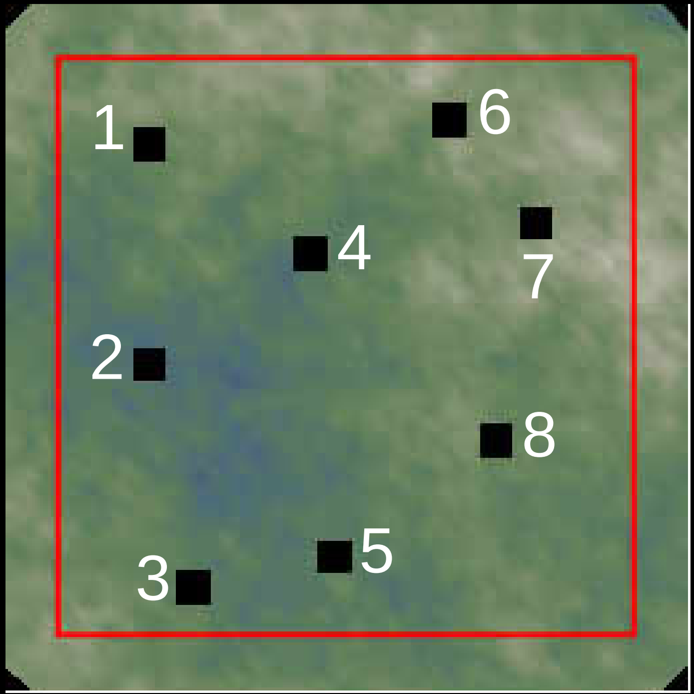
ここまでのまとめ

- コドラート調査：観測値は互いに正の自己相関を持つ
- 自己相関を無視したANOVAでは type I error rate が↑
- 有効標本数 *n'* から計算した自由度を用いればよい
- *n'* の計算には共分散行列 Σ の指定が必要

Collecting data ⇨ **Estimating Σ** ⇨ **Calculating *n'*** ⇨ **Df-adjusted *F*-test**

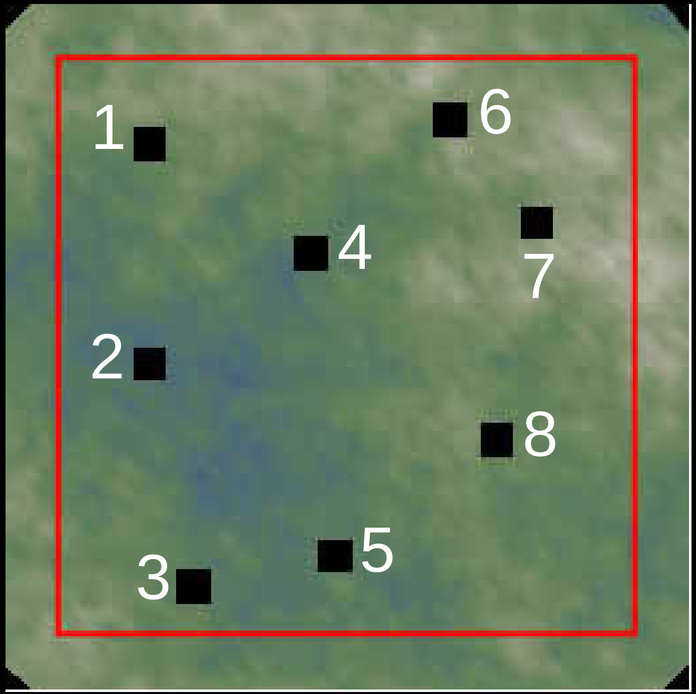
$$n' = n^2\sigma^2 \Big/ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}$$

$$\text{where } \sigma^2 = \sigma_{ii}\ \forall\ i.$$



$$n' = n^2\sigma^2 \Big/ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}$$

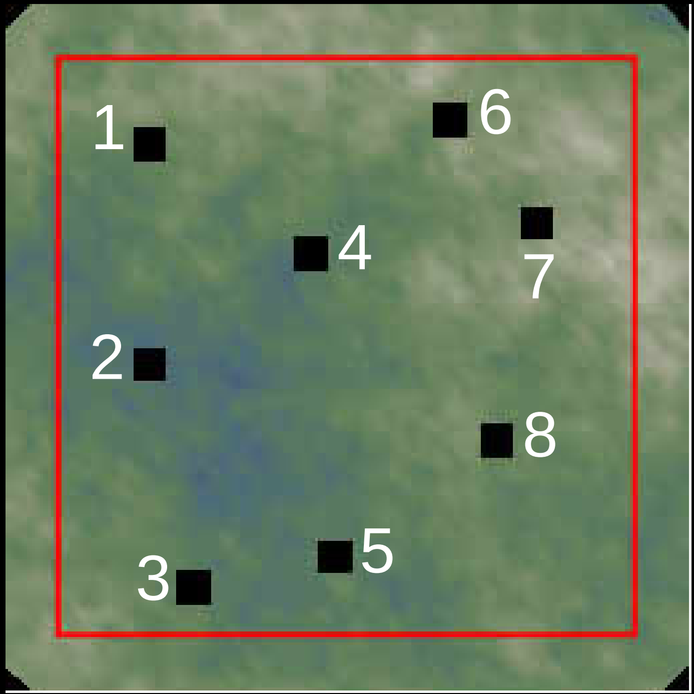
where $\sigma^2 = \sigma_{ii}\ \forall\ i.$



$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{18} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{28} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{81} & \sigma_{82} & \cdots & \sigma_{88} \end{bmatrix}$$

$$n' = n^2\sigma^2 \Big/ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}$$

where $\sigma^2 = \sigma_{ii}\ \forall\ i$.

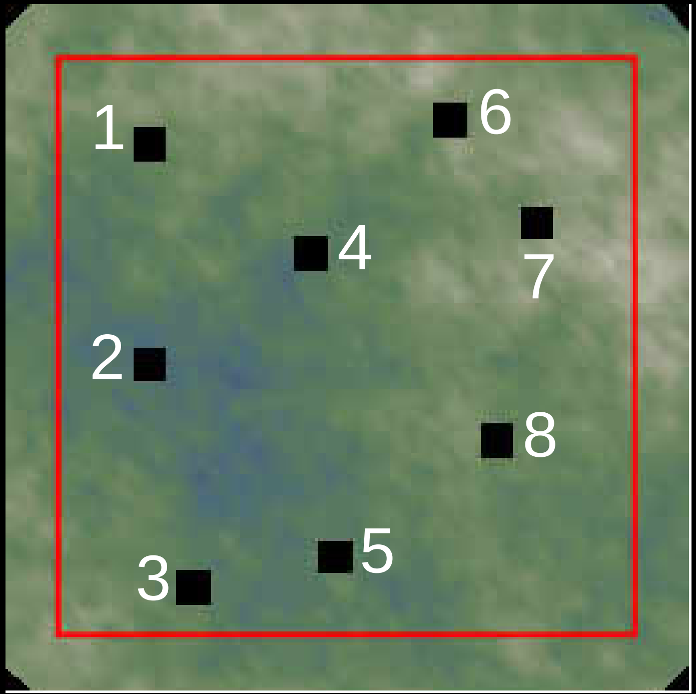


$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{18} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{28} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{81} & \sigma_{82} & \cdots & \sigma_{88} \end{bmatrix}$$

*k*個の観測値から{*k*(*k*-1)/2}+1個のパラメータを推定しなければならない！

$$n' = n^2\sigma^2 \Big/ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}$$

where $\sigma^2 = \sigma_{ii}\ \forall\ i.$



$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{18} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{28} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{81} & \sigma_{82} & \cdots & \sigma_{88} \end{bmatrix}$$

*k*個の観測値から{*k*(*k*-1)/2}+1個のパラメータを推定しなければならない！

⇩

パラメータの少ない共分散行列を仮定する

III.共分散行列の指定と推定

Typical Covariance Matrices

Covariance structure:	dim θ
Unstructured	$k(k-1)/2 + 1$
First-order autoregressive	2
Independent observation	1

Typical Covariance Matrices

Covariance structure:	dim θ
Unstructured	*k*(*k*–1)/2 + 1
First-order autoregressive	2
Independent observation	1

$$\boldsymbol{\Sigma} = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \rho_3 \\ \rho_1 & 1 & \rho_4 & \rho_5 \\ \rho_2 & \rho_4 & 1 & \rho_6 \\ \rho_3 & \rho_5 & \rho_6 & 1 \end{bmatrix}$$

Typical Covariance Matrices

Covariance structure:	dim θ
Unstructured	$k(k-1)/2 + 1$
First-order autoregressive	2
Independent observation	1

$$\Sigma = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Typical Covariance Matrices

Covariance structure:	**dim θ**
Unstructured	***k*(*k*–1)/2 + 1**
First-order autoregressive	**2**
Independent observation	**1**

$$\Sigma = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho^{d(1,2)} & \rho^{d(1,3)} & \rho^{d(1,4)} \\ \rho^{d(2,1)} & 1 & \rho^{d(2,3)} & \rho^{d(2,4)} \\ \rho^{d(3,1)} & \rho^{d(3,2)} & 1 & \rho^{d(3,4)} \\ \rho^{d(4,1)} & \rho^{d(4,2)} & \rho^{d(4,3)} & 1 \end{bmatrix}$$

$$d(p;q) = \sqrt{(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2}$$

共分散行列の最尤推定

Data: ***N*** **samples from** ***k*****-variate normal distribution**

Maximum likelihood estimates of parameter(s) θ for Σ:

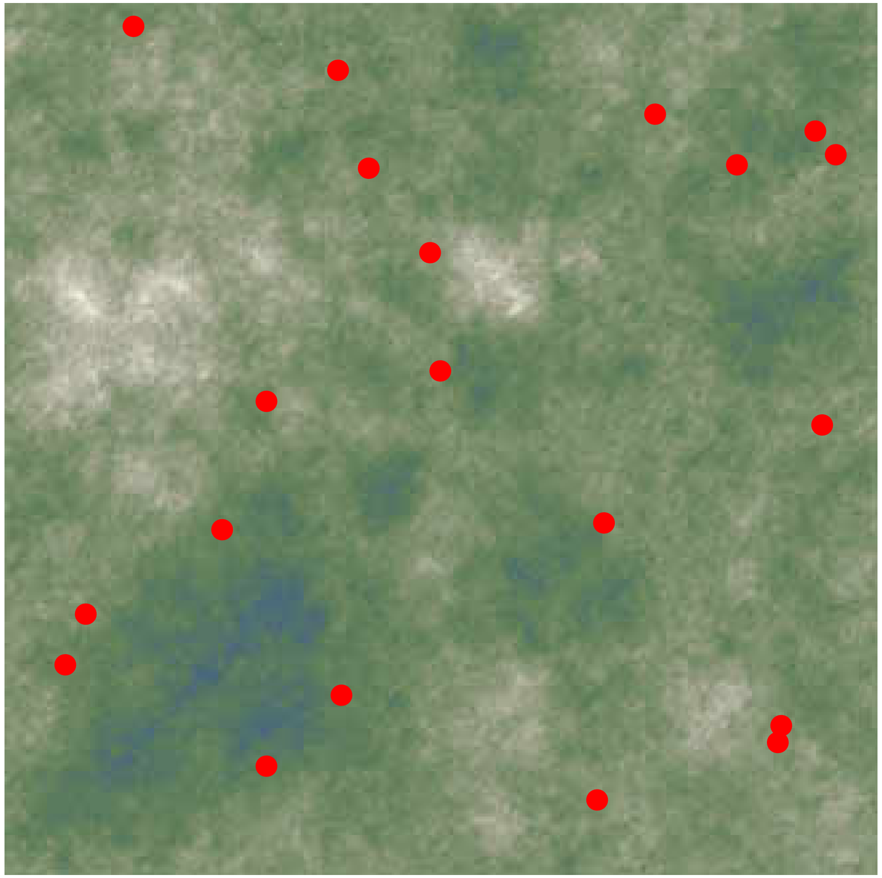
$$\hat{\Sigma}_{\mathrm{ML}} = \arg\max_{\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\theta})} LL(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\theta})|\boldsymbol{x})$$

where

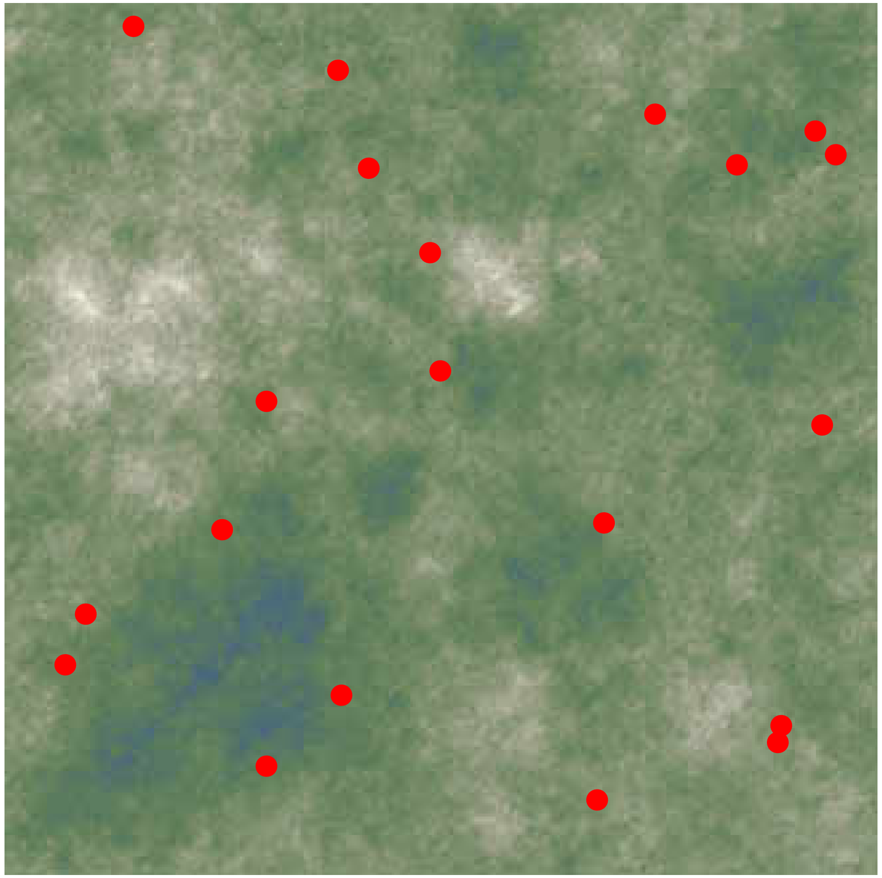
$$LL = -\frac{nk}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln|\boldsymbol{\Sigma}| - \frac{1}{2}\mathrm{tr}[\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\sum_{j=1}^{n}(\boldsymbol{y}_j - \boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{y}_j - \boldsymbol{\mu})']$$

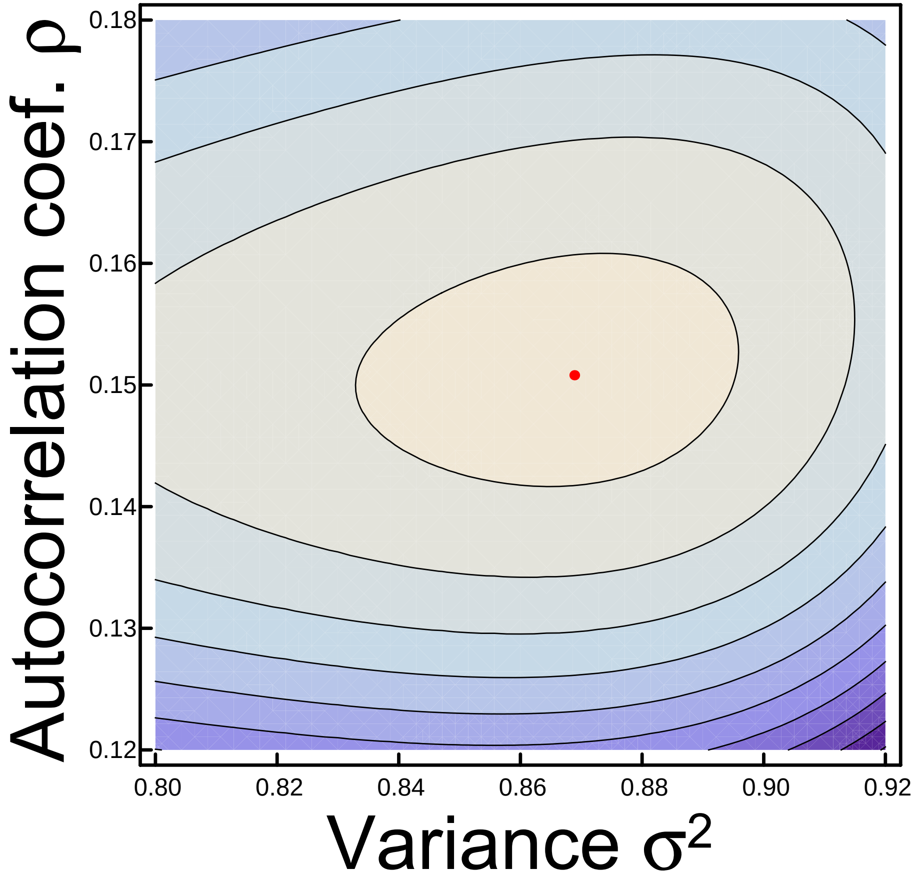
实例：first-order autoregressive

実例：first-order autoregressive Fractal terrain上で20地点を無作為に選択

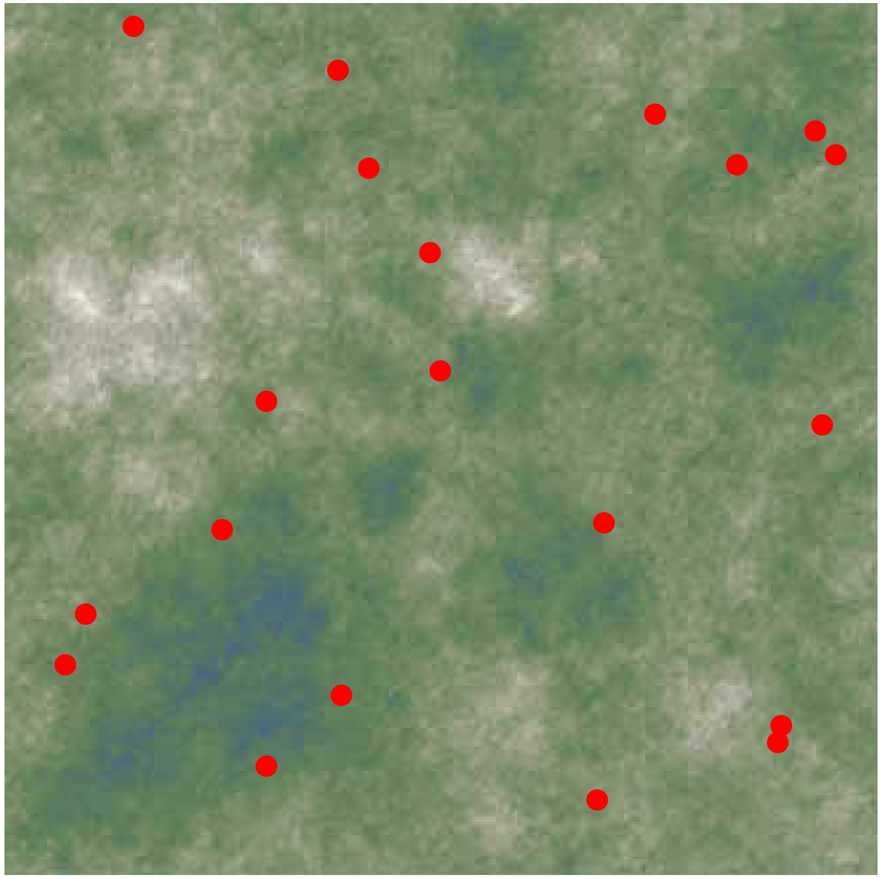


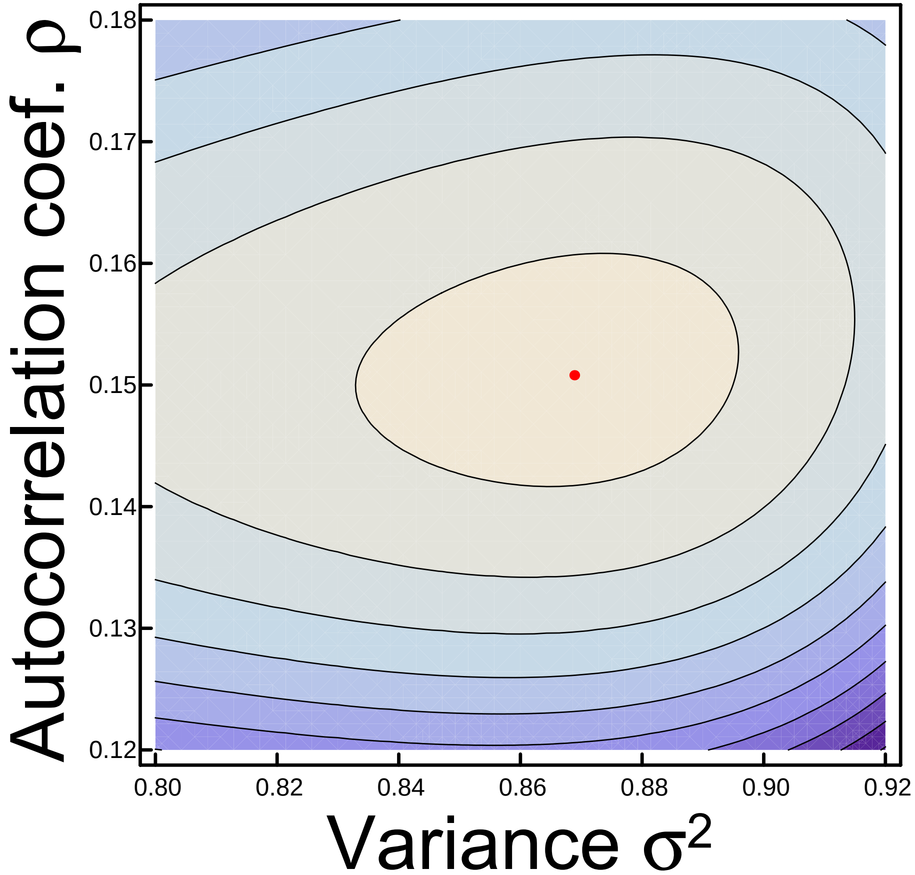
実例：first-order autoregressive
Fractal terrain上で20地点を無作為に選択





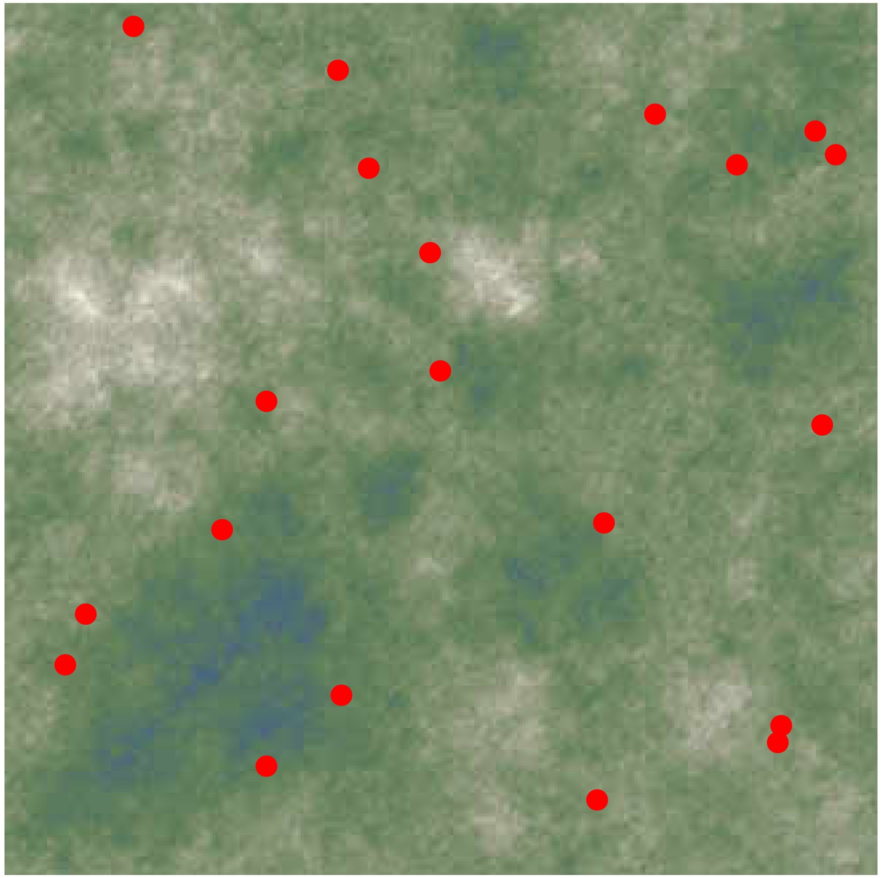
実例：first-order autoregressive
Fractal terrain上で20地点を無作為に選択

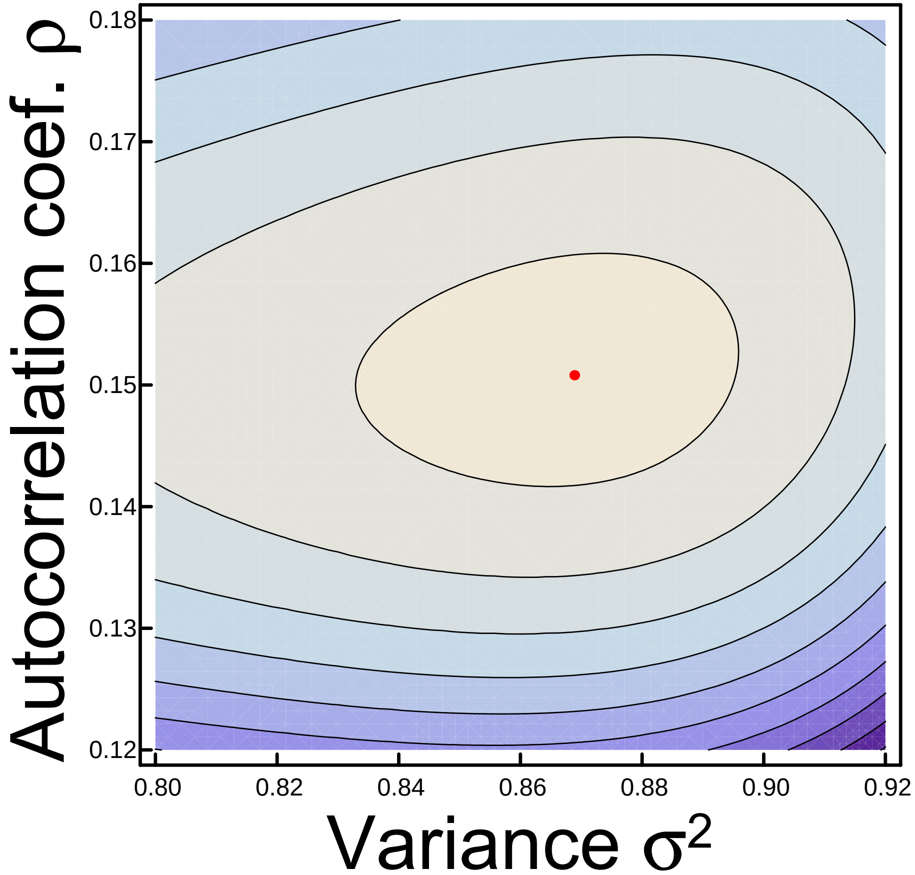




maxLL=-9.28; σ^2=0.15; ρ=0.87

実例：first-order autoregressive
Fractal terrain上で20地点を無作為に選択





$\max LL = -9.28$; $\sigma^2 = 0.15$; $\rho = 0.87$

$n' = 19.35 < 20.00$

前半のまとめ

- pseudoreplicationとは？
- **空間的自己相関を考慮した野外実験と統計解析**
- **空間的自己相関を考慮した野外調査と統計解析**

前半のまとめ

- pseudoreplicationとは？
- 空間的自己相関を考慮した野外実験と統計解析
- 空間的自己相関を考慮した野外調査と統計解析

－偽反復の予防－

偽反復が起こらない統計解析が可能なデータを取れるような実験やサンプリングのデザインを事前によく考える！