

Mathematical Analysis of HIV Immune System

Graduate School of Science and Engineering, Shizuoka University
Takayuki Abe, Yasuhiro Takeuchi

Outline

We revise the model proposed by Martin A. Nowak and R.M. Bangham[1], and analyze stability of the equilibrium point

免疫システム

免疫とは細菌やウイルスなどの異物が侵入してきたときに、その異物を攻撃・排除する生体防御のことである。免疫システムには液性免疫・細胞性免疫がある。液性免疫は、 B 細胞が抗体を作りだし、抗原抗体反応が起こることにより異物の働きををなくさせたり、体内から異物を除去する。細胞性免疫は、異物の感染した細胞を CTL によって除去する働きである。また、免疫システムにおいて重要な役割を果たしているのがヘルパー T 細胞である。ヘルパー T 細胞は B 細胞が抗体を作り出すとき、また CTL が働くときに免疫機構には欠かせない存在である。

HIV は、ヘルパー T 細胞を持つ $CD4$ 細胞に感染し最終的に免疫機能を麻痺させ免疫不全を引き起こす。

HIV 免疫モデル

基本モデル [1] は後者の細胞性免疫を考慮してモデルを組み立てているので、基本モデルに前者の液性免疫を組み込んだモデルを導出する。

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \lambda - dx - \beta xv \\ \dot{y} &= \beta xv - ay - pyz \\ \dot{v} &= ky - uv - qyv\end{aligned}$$

$$\dot{z} = cyz - bz$$

x : 非感染細胞 y : 感染細胞 v : ウイルス z : CTL それぞれの個体数である。非感染細胞は、一定変化率 λ で産出され、死亡率 d を持つ。感染細胞は感染率 β で非感染細胞とウイルスの出会いの数に比例して発生し、死亡率 a を持ち、 CTL によって除去される（割合 p ）。ウイルスは産出率 k で感染細胞から産出され、死亡率 u を持ち、感染細胞によってで除去される（割合 q ）。 CTL はウイルスとの出会いの数に比例して増殖率 c で増加し、死亡率 b を持つ。基本モデルは $q = 0$ である。各平衡点におけるヤコビ行列を求め、その固有値の判別を行う。固有値の決定が困難な場合は *Routh – Hurwitz* の安定判別条件を用いる。

結果

ウイルスが感染したときに、閾値の値が 1 より小さいときには未感染細胞だけの状態となり、感染は広がらない。しかし、閾値の値が 1 を超えるとウイルスと感染細胞が定着する。基本モデルにおける平衡点の値と比較すると液性免疫を加えることにより感染細胞・ウイルス共に減少していることがわかり改良したモデルのほうが効果的であるといえる。

参考文献

- [1] Martin A. Nowak and Charles R.M. Bangham, Population Dynamics of Immune Responses to Persistent Viruses