

確率セルオートマトンへの超離散化

Ultradiscretization toward Stochastic Cellular Automata

国松俊彦，今野紀雄（横浜国立大学）

Toshihiko KUNIMATSU and Norio KONNO (Yokohama National University)

最近，超離散化の手法が盛んに研究されているが^{1,2)}，確率セルオートマトンへの超離散化の構造はまだよく研究されていないので，その構造に関して検討を行う．特に本研究では，超離散化を行うと確率セルオートマトンの特別な形である Domany-Kinzel モデル³⁾を表す方程式が得られるような確率偏差分方程式を探しだし，さらにその時空間連続極限に相当する確率偏微分方程式を求め，確率セルオートマトンの解の挙動を考察する．以下，超離散化について簡単に説明をする．

まず， $\mathbf{X} = \{X_j^t : t \in \{0, 1, 2, \dots\}, j \in \mathbb{Z}\}$ ， $\mathbf{Y} = \{Y_j^t : t \in \{0, 1, 2, \dots\}, j \in \mathbb{Z}\}$ はそれぞれ独立同分布で，かつ $\mathbf{X}$ と $\mathbf{Y}$ も独立とする．但し，

$$P(X_j^t = 1) = p, \quad P(X_j^t = 0) = 1 - p, \quad P(Y_j^t = 1) = q, \quad P(Y_j^t = 0) = 1 - q$$

である．このとき次の確率偏差分方程式を考える．

$$u_j^{t+1} = \left\{ \frac{(u_{j-1}^t)^2 + (u_{j+1}^t)^2}{1 + u_{j-1}^t u_{j+1}^t} \right\}^{X_j^t} \left\{ \frac{1 + u_{j-1}^t u_{j+1}^t}{u_{j-1}^t + u_{j+1}^t} \right\}^{Y_j^t} \quad (1)$$

但し， $u_j^t \in [1, \infty)$ ， $t \in \{0, 1, 2, \dots\}$ ， $j \in \mathbb{Z}$ ．(1) を $u_j^t = e^{U_j^t/\epsilon}$ と変数変換すると，

$$e^{U_j^{t+1}/\epsilon} = \left\{ \frac{e^{2U_{j-1}^t/\epsilon} + e^{2U_{j+1}^t/\epsilon}}{1 + e^{(U_{j-1}^t + U_{j+1}^t)/\epsilon}} \right\}^{X_j^t} \left\{ \frac{1 + e^{(U_{j-1}^t + U_{j+1}^t)/\epsilon}}{e^{U_{j-1}^t/\epsilon} + e^{U_{j+1}^t/\epsilon}} \right\}^{Y_j^t} \quad (2)$$

両辺の $\log$ をとって，

$$\begin{aligned} U_j^{t+1} = X_j^t & \left[\epsilon \left\{ \log \left(e^{2U_{j-1}^t/\epsilon} + e^{2U_{j+1}^t/\epsilon} \right) - \log \left(1 + e^{(U_{j-1}^t + U_{j+1}^t)/\epsilon} \right) \right\} \right] \\ & + Y_j^t \left[\epsilon \left\{ \log \left(1 + e^{(U_{j-1}^t + U_{j+1}^t)/\epsilon} \right) - \log \left(e^{U_{j-1}^t/\epsilon} + e^{U_{j+1}^t/\epsilon} \right) \right\} \right] \end{aligned} \quad (3)$$

$\epsilon \rightarrow +0$ の極限を考えると，公式 $\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \epsilon \log (e^{A/\epsilon} + e^{B/\epsilon} + \dots) = \max(A, B, \dots)$ より，

$$\begin{aligned} U_j^{t+1} = X_j^t & [2 \max(U_{j-1}^t, U_{j+1}^t) - \max(0, U_{j-1}^t + U_{j+1}^t)] \\ & + Y_j^t [\max(0, U_{j-1}^t + U_{j+1}^t) - \max(U_{j-1}^t, U_{j+1}^t)] \end{aligned} \quad (4)$$

となり，Domany-Kinzel モデルを表す方程式が得られる⁴⁾．シンポジウムでは，上記の確率偏差分方程式と Domany-Kinzel モデルの関係について報告したい．

1) D.Takahashi and J.Matsukidaira: Phys. Lett. A **209** (1995) 184.

2) T.Tokihito, D.Takahashi, J.Matsukidaira and J.Satsuma: Phys. Rev. Lett. **29** (1996) 3247.

3) 今野紀雄: "ある無限粒子系の局所性と大域性"，数理科学，No.436，サイエンス社 (1999) 37-43.

4) 今野紀雄: "Domany-Kinzel モデルへの超離散化"，中大セミナーノート (4/4/2000).